

Éléments propres.

1. Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, soit l'endomorphisme $\Phi : f \mapsto f''$. Déterminer ses éléments propres.

Soit λ un réel. On recherche les fonctions f vérifiant $f'' = \lambda f$, ce sont donc les solutions de l'équation différentielle $y'' - \lambda y = 0$ (équation linéaire du second ordre à coefficients constants, sans second membre). On peut donc affirmer (*cours de première année*) que tout réel λ est valeur propre de Φ , et que les sous-espaces propres $E_\lambda(\Phi) = \text{Ker}(\Phi - \lambda \text{id}_E)$ sont tous de dimension deux. Plus précisément,

- pour $\lambda = 0$, le sous-espace propre $E_0(\Phi) = \text{Ker} \Phi$ est constitué des fonctions affines $x \mapsto Ax + B$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$;

- pour $\lambda > 0$, posons $\omega = \sqrt{\lambda}$, le sous-espace propre $E_\lambda(\Phi)$ est constitué des solutions de l'équation $y'' - \omega^2 y = 0$, ce sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto A \operatorname{ch}(\omega x) + B \operatorname{sh}(\omega x), \quad \text{ou encore} \quad x \mapsto a e^{\omega x} + b e^{-\omega x},$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ ou $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- pour $\lambda < 0$, posons $\omega = \sqrt{-\lambda}$, le sous-espace propre $E_\lambda(\Phi)$ est constitué des solutions de l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$, ce sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x), \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

- Montrer que, si $\lambda \in \mathbb{K}^*$ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est aussi valeur propre de $v \circ u$.
- Si E est de dimension finie, montrer que $\text{Sp}(v \circ u) = \text{Sp}(u \circ v)$.
- Si E est de dimension infinie, montrer que 0 peut être valeur propre de $u \circ v$ sans être valeur propre de $v \circ u$. On pourra, dans $E = \mathbb{K}[X]$, considérer l'opérateur de dérivation

$$D : P \mapsto P' \quad \text{et un "opérateur de primitivation"} \quad \Phi : P \mapsto \int_0^X P(t) dt.$$

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ une valeur propre **non nulle** de $u \circ v$, il existe alors un vecteur x **non nul** de E tel que $u \circ v(x) = \lambda x$. En appliquant v , on obtient $v \circ u \circ v(x) = \lambda v(x)$, soit $(v \circ u)(v(x)) = \lambda v(x)$. Or, le vecteur $v(x)$ est **non nul** : en effet, si on avait $v(x) = 0_E$, cela entraînerait $\lambda x = u(v(x)) = 0_E$ donc $x = 0_E$ puisque λ est non nul, et c'est absurde. Le scalaire λ est donc aussi valeur propre de $v \circ u$, le vecteur **non nul** $v(x)$ étant un vecteur propre associé.
- En dimension finie, on peut utiliser les déterminants. Rappelons que le spectre est alors l'ensemble des valeurs propres (*faux en dimension infinie*). Si λ est un scalaire non nul, il appartient à $\text{Sp}(u \circ v)$ si et seulement s'il appartient à $\text{Sp}(v \circ u)$ d'après la question **a**. Il reste à étudier le cas $\lambda = 0$, mais rappelons que 0 est valeur propre d'un endomorphisme si et seulement si cet endomorphisme est non injectif, c'est-à-dire (en dimension finie) de déterminant nul. Donc

$$0 \in \text{Sp}(u \circ v) \iff \det(u \circ v) = 0 \iff \det(u) \det(v) = 0 \iff \det(v \circ u) = 0 \iff 0 \in \text{Sp}(v \circ u).$$

- Considérons les endomorphismes D et Φ de $\mathbb{R}[X]$ aimablement prêtés par l'énoncé. Notons d'abord que, si P est un polynôme, $\Phi(P)$ est la "primitive formelle" de P qui

$$\text{s'annule en zéro, autrement dit si } P = \sum_{k=0}^d a_k X^k, \text{ alors } \Phi(P) = \sum_{k=0}^d a_k \frac{X^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{d+1} \frac{a_{k-1}}{k} X^k.$$

Il est immédiat de vérifier que, pour tout polynôme P , on a $D(\Phi(P)) = P$, donc $D \circ \Phi = \text{id}_E$ et l'endomorphisme $D \circ \Phi$ est injectif et n'admet donc pas 0 pour valeur propre.

Par contre, pour tout polynôme P , on a $\Phi(D(P)) = P - P(0)$: si $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, alors

$\Phi(D(P)) = \sum_{k=1}^d a_k X^k = P - a_0$; ainsi, $\text{Ker}(\Phi \circ D)$ est l'ensemble $\mathbb{K}_0[X] \simeq \mathbb{K}$ des polynômes constants et l'endomorphisme $\Phi \circ D$ n'est pas injectif donc admet 0 pour valeur propre.

3. Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme f de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ défini par

$$f : P \mapsto (X^2 - 1)P'' + 2X P'.$$

L'endomorphisme f diminue les degrés: on vérifie facilement que $\deg(f(P)) \leq \deg(P)$ pour tout polynôme P . Il en résulte que, pour tout n entier naturel, le sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par f , et que l'endomorphisme induit f_n est représenté, dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$, par une matrice T_n triangulaire supérieure. Explicitons cette matrice T_n , pour cela calculons les images par f des polynômes X^k . On a immédiatement $f(1) = 0$, $f(X) = 2X$ et, pour $k \geq 2$, $f(X^k) = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}$. D'où

$$T_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 6 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}.$$

Comme T_n est triangulaire, on a

$$\text{Sp}(f_n) = \text{Sp}(T_n) = \{0, 2, 6, \dots, n(n+1)\} = \{k(k+1) ; 0 \leq k \leq n\}.$$

Enfin, un réel est valeur propre de f si et seulement s'il est valeur propre de f_n pour au moins un entier n (*vérification laissée à l'improbable lecteur*). En conclusion, les valeurs propres de f sont les $k(k+1)$ pour k entier naturel.

4. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme f de $E = \mathbb{R}_n[X]$ défini par $f(P) = (X^2 - 1)P' - nXP$.

Notons d'abord que f est bien un endomorphisme de E : la linéarité est immédiate, et on constate ensuite que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le polynôme image $f(X^k)$ est de degré au plus n (il est de degré $k+1$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, et $f(X^n)$ est de degré n grâce à une annihilation des termes de degré $n+1$). Donc f va bien de E dans E .

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors λ est valeur propre de f si et seulement s'il existe un polynôme P non nul, de degré au plus n , tel que $f(P) = \lambda P$, donc si et seulement si l'équation différentielle

$(E_\lambda) : (x^2 - 1) y' - (nx + \lambda) y = 0$ admet une solution polynomiale non nulle de degré au plus n . Résolvons cette équation sur l'un des intervalles $] -\infty, -1[$, $] -1, 1[$ ou $]1, +\infty[$ sur lesquels il est possible de la mettre sous sa "forme normale" $y' = \frac{nx + \lambda}{x^2 - 1} y$. Après une décomposition en éléments simples, on a

$$(E_\lambda) \iff y' = \left(\frac{n + \lambda}{2} \frac{1}{x - 1} + \frac{n - \lambda}{2} \frac{1}{x + 1} \right) y ,$$

ce qui se résout en

$$y = C |x - 1|^{\frac{n + \lambda}{2}} |x + 1|^{\frac{n - \lambda}{2}} .$$

Les fonctions obtenues sont polynomiales de degré au plus n (en fait, si elles sont polynomiales, elles sont de degré n exactement) sur les intervalles considérés si et seulement si les exposants $\frac{n + \lambda}{2}$ et $\frac{n - \lambda}{2}$ sont des entiers naturels de l'intervalle $\llbracket 0, n \rrbracket$. On en déduit que λ est nécessairement de la forme $2k - n$ avec $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Pour un tel λ , on s'aperçoit alors que le polynôme $P = (X - 1)^k (X + 1)^{n - k}$ est un vecteur propre associé. On a obtenu $n + 1$ valeurs propres distinctes, il ne peut y en avoir d'autres puisque $\dim(E) = n + 1$.

Bilan. $\text{Sp}(f) = \{2k - n ; 0 \leq k \leq n\}$ et $E_{2k - n}(f) = \text{Vect}((X - 1)^k (X + 1)^{n - k})$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, les sous-espaces propres sont des droites vectorielles. *On peut alors affirmer que f est diagonalisable puisqu'on a construit une base de vecteurs propres, ou bien puisqu'il a $n + 1$ valeurs propres distinctes en dimension $n + 1$.*

5. Soit f l'endomorphisme de l'espace vectoriel $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ défini par $f(u) = v$ avec

$$v_0 = u_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \frac{u_{n-1} + u_n}{2} .$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f .

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, discutons l'équation $f(u) = \lambda u$ avec $u \in E$. Elle se traduit par

$$\begin{cases} u_0 = \lambda u_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{u_{n-1} + u_n}{2} = \lambda u_n \end{cases} .$$

- si $\lambda = 1$, on peut choisir u_0 quelconque, la deuxième condition se traduit alors par $u_{n-1} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Les solutions de l'équation $f(u) = u$ sont les suites constantes (qui forment un s.e.v. de dimension 1) ;

- si $\lambda \neq 1$, la première condition impose $u_0 = 0$, la deuxième donne $(2\lambda - 1)u_n = u_{n-1}$, d'où deux sous-cas:

▷ si $\lambda = \frac{1}{2}$, alors $u_{n-1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la seule solution est la suite nulle ;

▷ si $\lambda \neq \frac{1}{2}$, alors $u_n = \frac{u_{n-1}}{2\lambda - 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et partant de $u_0 = 0$, on obtient aussi

que u est la suite nulle.

Finalement, la seule valeur propre de l'endomorphisme f est 1, et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle constituée des suites constantes.

6.a. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice canoniquement associée. Soit par ailleurs H un hyperplan de $\mathbb{K}^n$ d'équation cartésienne $v_1x_1 + \dots + v_nx_n = 0$, avec $v_1, \dots, v_n$ scalaires non tous nuls. Montrer que H est stable par u si et seulement le vecteur

$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ est vecteur propre de la matrice $A^\top$.

b. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement représenté par la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par u .

a. Posons $W = A^\top V = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$. On notera qu'un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{K}^n$ appartient à

H si et seulement si on a $V^\top X = 0$.

- Supposons V vecteur propre de $A^\top$, alors il existe un scalaire λ tel que $A^\top V = \lambda V$, donc en transposant $V^\top A = \lambda V^\top$. Si X appartient à H , on a alors $V^\top X = 0$, d'où $V^\top (AX) = (V^\top A)X = \lambda V^\top X = 0$, ce qui signifie que le vecteur AX est aussi dans H . Ainsi, H est stable par la matrice A ou, ce qui revient au même, par l'endomorphisme u .

- Supposons H stable par u . Ainsi, pour tout vecteur X de H , on a $AX \in H$, c'est-à-dire

$V^\top AX = 0$, soit encore $W^\top X = 0$. Autrement dit, tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de H vérifie

l'équation cartésienne $w_1x_1 + \dots + w_nx_n = 0$. Deux cas se présentent alors:

- si $W = 0$, i.e. si tous les coefficients w_i sont nuls, alors $V \in \text{Ker}(A^\top)$, donc V est bien vecteur propre de $A^\top$ (pour la valeur propre 0) ;
- si les w_i ne sont pas tous nuls, l'hyperplan H' d'équation cartésienne $w_1x_1 + \dots + w_nx_n = 0$ est confondu avec H (on a vu ci-dessus que $H \subset H'$ et ils ont la même dimension car ce sont des hyperplans). Mais deux équations linéaires définissant le même hyperplan sont proportionnelles (*résultat du cours que l'on peut aussi énoncer sous la forme: deux formes linéaires non nulles ayant le même noyau sont proportionnelles*), il en résulte qu'il existe un scalaire λ (alors non nul) tel que $W = \lambda V$, i.e. $A^\top V = \lambda V$, ce qu'il fallait démontrer.

b. Il y a déjà deux s.e.v. triviaux qui sont stables par u , ce sont:

- le s.e.v. $\{0_E\}$, de dimension 0 ;
- l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier, de dimension 3.

Les droites vectorielles stables (dimension 1) sont celles dirigées par des vecteurs propres, recherchons donc ces derniers. Un petit calcul, laissé à l'estimable lecteur, montre que $\chi_A = (X - 2)(X^2 - 2X + 2)$, donc la seule valeur propre **réelle** de la matrice A (i.e. la seule valeur propre de l'endomorphisme u) est $\lambda = 2$. Le sous-espace propre est la droite

vectorielle D engendrée par le vecteur propre $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Cette droite D est alors l'unique

droite vectorielle stable.

En utilisant la question **a.**, on voit que les plans stables sont obtenus en recherchant les vecteurs propres de la matrice $A^\top$. Cette matrice a les mêmes valeurs propres que A , à savoir seulement 2 comme valeur propre réelle, mais le sous-espace propre est la droite engendrée

par le vecteur $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le seul plan vectoriel stable par u est alors celui d'équation cartésienne $V^\top X = 0$, i.e. $y + z = 0$.

7. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice **strictement stochastique**, i.e. telle que

$$\begin{aligned} \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad & a_{i,j} > 0 ; \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad & \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1 . \end{aligned}$$

a. Montrer que 1 est valeur propre de A .

b. Montrer que $\forall \lambda \in \text{Sp}(A) \quad |\lambda| \leq 1$.

c*. Montrer que, si $\lambda \in \text{Sp}(A)$ est de module 1, alors $\lambda = 1$.

a. La relation $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$ signifie que $AV = V$, avec $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc le nombre 1 est valeur propre de A , et V est un vecteur propre associé.

b. Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$, soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associée, posons $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. Alors $\|X\|_\infty > 0$ puisque X n'est pas le vecteur nul. Comme $AX = \lambda X$,

on a, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la relation $\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = \lambda x_i$. Donc

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad |\lambda| |x_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j} x_j| \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} \|X\|_\infty = \|X\|_\infty .$$

Cette majoration étant vraie pour tout indice i , elle "passe au sup", i.e. $|\lambda| \|X\|_\infty \leq \|X\|_\infty$. Comme $\|X\|_\infty > 0$, on déduit $|\lambda| \leq 1$.

c. Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$ de module 1, soit $X = (x_1 \ \cdots \ x_n)^\top$ un vecteur propre associé. Soit $s \in \llbracket 1, n \rrbracket$ un indice tel que $|x_s| = \|X\|_\infty$. On a, d'après **a.**, la relation

$$|x_s| = \left| \sum_{j=1}^n a_{s,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n a_{s,j} |x_j| \leq \sum_{j=1}^n a_{s,j} \|X\|_\infty = \|X\|_\infty = |x_s| .$$

L'égalité entre les termes extrêmes entraîne l'égalité à chaque intermédiaire.

De $\sum_{j=1}^n a_{s,j} |x_j| = \sum_{j=1}^n a_{s,j} \|X\|_\infty$, que l'on peut écrire aussi $\sum_{j=1}^n a_{s,j} (\|X\|_\infty - |x_j|) = 0$, on déduit d'abord que chaque terme de cette dernière somme est nul (c'est une somme de

termes positifs qui est nulle) et, les coefficients de la matrice A étant tous non nuls, on déduit ensuite que $|x_j| = \|X\|_\infty = |x_s|$ pour tout j .

Ensuite, de $\left| \sum_{j=1}^n a_{s,j} x_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{s,j} x_j|$, on déduit que les nombres complexes $a_{s,j} x_j$ sont positivement liés (cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire), i.e. ils ont le même argument (ils sont tous non nuls) donc il existe un réel θ tel que $x_j = e^{i\theta} |x_j|$ pour tout j . Finalement, $x_j = e^{i\theta} \|X\|_\infty$ pour tout j , ce qui signifie que $X = e^{i\theta} \|X\|_\infty V$, où V est le vecteur-colonne introduit en **a**. Comme $AV = V$, on déduit que $AX = X$, puis que $\lambda = 1$.

Remarque. Cette démonstration prouve aussi que $E_1(A) = \text{Vect}(V)$.

8. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, soit $v \in \mathcal{L}(E)$ commutant avec u . On pose $f = u + v$. Montrer que f et v ont les mêmes valeurs propres.

• Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de v , alors il existe $x \in E$, non nul, tel que $v(x) = \lambda x$. Comme u est nilpotent, l'ensemble $\{j \in \mathbb{N}^* \mid u^j(x) \neq 0_E\}$ est une partie non vide, elle admet alors un minimum k , on a alors $u^{k-1}(x) \neq 0_E$ et $u^k(x) = 0_E$.

Attention. Cet entier k n'est pas forcément l'**indice de nilpotence** de u défini par $p = \min\{j \in \mathbb{N}^* \mid u^j = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$. On a seulement $k \leq p$ en général.

En posant $y = u^{k-1}(x)$, on a alors $u(y) = 0_E$ et on dispose d'un vecteur y **non nul** tel que

$$f(y) = v(y) = v(u^{k-1}(x)) = u^{k-1}(v(x)) = u^{k-1}(\lambda x) = \lambda u^{k-1}(x) = \lambda y$$

(en effet, si v commute avec u , il commute aussi avec u^{k-1} , c'est une récurrence immédiate). Donc λ est aussi valeur propre de f .

• Comme $v = (-u) + f$ avec $-u$ nilpotent, les endomorphismes $-u$ et f commutent puisque $(-u) \circ f = -u \circ (u + v) = -u^2 - u \circ v = -u^2 - v \circ u = f \circ (-u)$, on peut dire que f et v jouent des rôles symétriques, il est donc inutile de rédiger une réciproque: toute valeur propre de f est donc aussi valeur propre de v .

Polynôme caractéristique.

9. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 3 & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ admet une unique valeur propre réelle strictement positive.

Le lecteur instruit et perspicace aura remarqué que A est une "matrice-compagnon" .

Pour calculer son polynôme caractéristique $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ -3 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -n & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$, on peut

effectuer l'opération élémentaire $L_n \leftarrow L_n + xL_{n-1} + x^2L_{n-2} + \cdots + x^{n-1}L_1$, puis développer par rapport à la dernière ligne ; on obtient $\chi_A(x) = x^n - (x^{n-1} + 2x^{n-2} + \cdots + (n-1)x + n)$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on peut écrire $\chi_A(x) = x^n f(x)$, avec

$$f(x) = 1 - \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \cdots + \frac{n-1}{x^{n-1}} + \frac{n}{x^n} \right) = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{k}{x^k}.$$

Il est immédiat que la fonction f a une dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$; par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, donc f établit une bijection (dérivable strictement croissante) de $\mathbb{R}_+^*$ vers $] -\infty, 1[$. Il existe donc un unique réel strictement positif α tel que $f(\alpha) = 0$, c'est-à-dire tel que $\chi_A(\alpha) = 0$, et la matrice A admet donc pour seule valeur propre réelle strictement positive ce nombre α .

- 10.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible, soit $B = A^{-1}$. Quelle relation y a-t-il entre les polynômes caractéristiques χ_A et χ_B ?

Pour $x \in \mathbb{K}$ non nul, on écrit

$$\begin{aligned} \chi_B(x) &= \det(xI_n - A^{-1}) = \det[A^{-1}(xA - I_n)] = \det(A^{-1}) \cdot x^n \cdot \det\left(A - \frac{1}{x}I_n\right) \\ &= \frac{x^n}{\det(A)} (-1)^n \det\left(\frac{1}{x}I_n - A\right) = \frac{(-1)^n x^n}{\det(A)} \chi_A\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^n}{\chi_A(0)} \chi_A\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Bien sûr, $\chi_B(0) = (-1)^n \det(A^{-1}) = \frac{(-1)^n}{\det(A)} = \frac{1}{\chi_A(0)}$.

Autrement dit, si $\chi_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$, avec $a_0 = \chi_A(0) = (-1)^n \det(A)$ qui est non nul, alors

$$\chi_B = \frac{1}{a_0} (a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + 1).$$

- 11.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie n . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de rang 2. Exprimer son polynôme caractéristique χ_f à l'aide de $\text{tr}(f)$ et $\text{tr}(f^2)$.

Si $\text{rg}(f) = 2$, alors $\text{Ker}(f)$ est de dimension $n - 2$. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{n-2}, e_{n-1}, e_n)$ est une base de E adaptée à $\text{Ker}(f)$, alors la matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0_{n-2} & B \\ 0_{2, n-2} & A \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, i.e. les $n - 2$ premières colonnes sont nulles. Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a $\chi_f(x) = \chi_M(x) = x^{n-2} \chi_A(x)$. Or, $\chi_A(x) = x^2 - \text{tr}(A)x + \det(A)$, et on vérifie que

$$\det(A) = ad - bc = \frac{1}{2} \left((a+d)^2 - (a^2 + 2bc + d^2) \right) = \frac{1}{2} \left(\operatorname{tr}(A)^2 - \operatorname{tr}(A^2) \right).$$

Comme, par ailleurs, $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(f)$ et $\operatorname{tr}(A^2) = \operatorname{tr}(f^2)$ - cette dernière relation par exemple puisque $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & BA \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$ avec des blocs de même format que ci-dessus - on conclut que

$$\chi_f = X^{n-2} \left(X^2 - \operatorname{tr}(f) X + \frac{1}{2} \left(\operatorname{tr}(f)^2 - \operatorname{tr}(f^2) \right) \right).$$

- 12.** Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soient les matrices $M = \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_n \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -B & I_n \end{pmatrix}$, $M'' = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -B & \lambda I_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$. En effectuant les produits matriciels MM' et $M''M$, montrer que les matrices AB et BA ont le même polynôme caractéristique: $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

On calcule $MM' = \begin{pmatrix} \lambda I_n - AB & A \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$ et $M''M = \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ 0_n & \lambda I_n - BA \end{pmatrix}$.

Les deux étant triangulaires supérieures par blocs, on déduit les relations

$$\det(MM') = \det(\lambda I_n - AB) = \chi_{AB}(\lambda),$$

$$\det(M''M) = \det(\lambda I_n) \det(\lambda I_n - BA) = \lambda^n \chi_{BA}(\lambda).$$

Mais on a aussi $\det(MM') = \det(M) \det(M') = \det(M)$ et

$$\det(M''M) = \det(M'') \det(M) = \lambda^n \det(M) = \lambda^n \det(MM').$$

On en déduit que $\lambda^n \chi_{BA}(\lambda) = \lambda^n \chi_{AB}(\lambda)$ pour tout scalaire λ , et donc que $\chi_{BA}(\lambda) = \chi_{AB}(\lambda)$ pour tout λ scalaire **non nul**. Les fonctions polynomiales χ_{AB} et χ_{BA} coïncident en une infinité de points, on conclut que $\chi_{BA} = \chi_{AB}$.

Diagonalisation (pratique).

- 13.** Sans écrire aucun calcul, déterminer les éléments propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 8 & -12 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.

La matrice A est visiblement de rang 1, donc le nombre 0 est valeur propre et le sous-espace propre associé $E_0(A) = \operatorname{Ker} A$ est de dimension 2 (théorème du rang) : on voit par ailleurs que ce sous-espace est le plan d'équation cartésienne $x + 2y - 3z = 0$, une base est par

exemple constituée des deux vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si A admet une autre valeur propre $\lambda \neq 0$, un vecteur propre associé appartient nécessairement à $\text{Im } A$. Or, $\text{Im } A$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, et on vérifie que $AX_3 = 15X_3$, donc 15 est valeur propre de A et le sous-espace propre associé est $E_{15}(A) = \text{Im}(A) = \text{Vect}(X_3)$. On pouvait aussi utiliser la trace.

En conclusion, $\text{Sp}(A) = \{0 ; 15\}$, la matrice A est diagonalisable, on a par exemple

$$A = PDP^{-1}, \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

- 14.** Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En déduire toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

La matrice A est triangulaire inférieure, on lit donc immédiatement ses valeurs propres : $\text{Sp}(A) = \{1 ; 4 ; 9\}$. Comme elle a trois valeurs propres distinctes, on peut affirmer qu'elle est diagonalisable et que ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles. En notant (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$, on a immédiatement $E_1(A) = \text{Vect}(e_3)$ et $E_4(A) = \text{Vect}(e_2)$. En résolvant le système $AX = 9X$, on a facilement $E_9(A) = \text{Vect}(e_1 - e_2 - e_3)$. On en déduit la diagonalisation de la matrice A , soit $A = PDP^{-1}$, avec par exemple

$$P = \text{diag}(9, 4, 1) \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit M une matrice telle que $M^2 = A$. En notant m et a les endomorphismes de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associés aux matrices A et M respectivement, on a $m^2 = a$, ce qui entraîne que les endomorphismes a et m commutent ($a \circ m = m \circ a = m^3$), donc m laisse stables les sous-espaces propres de a , à savoir les trois droites vectorielles énumérées ci-dessus ; cela revient aussi à dire que les vecteurs $e_1 - e_2 - e_3$, e_2 et e_3 sont aussi vecteurs propres de m ; cela revient encore à dire que la matrice M est diagonalisable avec la même matrice de passage P (autrement dit dans la même base que la matrice A), on a donc nécessairement $M = P\Delta P^{-1}$, où $\Delta = \text{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$ est une matrice diagonale. Réciproquement, une telle matrice M (de la forme $P\Delta P^{-1}$) vérifie $M^2 = A$ si et seulement si $\Delta^2 = D$, autrement dit **ssi** $\alpha^2 = 9$, $\beta^2 = 4$, $\gamma^2 = 1$. Il y a donc exactement huit (2^3) matrices M solutions du problème posé : ce sont les matrices $M = P\Delta P^{-1}$, avec $\Delta = \text{diag}(3\varepsilon, 2\varepsilon', \varepsilon'')$, avec $(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'') \in \{-1 ; 1\}^3$. Pour les amateurs de calculs explicites, on obtient les quatre matrices

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et leurs opposées (s'il n'y a pas d'erreur... *mais qui ira vérifier ?*).

15. Rechercher toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 + M = J$, avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On pourra exploiter le fait qu'une telle matrice M commute nécessairement avec J .

Commençons par diagonaliser J (le détail des calculs est laissé au lecteur) : $J = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Si une matrice M vérifie $M^2 + M = J$, alors elle commute avec J , donc les sous-espaces propres de J , c'est-à-dire les droites vectorielles $E_0(J) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $E_2(J) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont stables par M , ce qui signifie que ces deux vecteurs sont vecteurs propres de M , donc M est diagonalisable à l'aide de la même matrice de passage P . On a donc $M = P\Delta P^{-1}$, où Δ est diagonale : $\Delta = \text{diag}(\alpha, \beta)$. La relation $M^2 + M = J$ se ramène alors à $\Delta^2 + \Delta = D$, soit encore à $\begin{cases} \alpha^2 + \alpha = 0 \\ \beta^2 + \beta = 2 \end{cases}$. Il y a quatre couples (α, β) solutions, à savoir $(0, 1)$, $(0, -2)$, $(-1, 1)$ et $(-1, -2)$, auxquels correspondent respectivement les quatre matrices M solutions du problème :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

16. Soient $n+1$ nombres complexes distincts $x_0, \dots, x_n$, soit le polynôme $B = \prod_{k=0}^n (X - x_k)$. Soit

d'autre part $A \in \mathbb{C}_n[X]$ un polynôme. On considère l'application φ qui, à tout polynôme P de $\mathbb{C}_n[X]$, associe le reste de la division euclidienne du polynôme AP par B .

- Montrer que φ peut être considéré comme un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$.
- On note $(L_0, \dots, L_n)$ la base de Lagrange associée aux points d'interpolation $x_0, \dots, x_n$. Calculer $\varphi(L_k)$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En déduire que l'endomorphisme φ est diagonalisable.

- L'application φ va bien de $\mathbb{C}_n[X]$ dans $\mathbb{C}_n[X]$ puisque le reste de la division euclidienne considérée doit être de degré strictement inférieur à $\deg(B) = n+1$. Montrons sa linéarité : soient $P_1 \in \mathbb{C}_n[X]$, $P_2 \in \mathbb{C}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, il existe alors un unique couple $(Q_1, R_1) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ tel que $AP_1 = BQ_1 + R_1$, et aussi un unique couple $(Q_2, R_2) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ tel que $AP_2 = BQ_2 + R_2$. On a alors $R_1 = \varphi(P_1)$ et $R_2 = \varphi(P_2)$. De ces relations, on déduit que $A(\lambda P_1 + P_2) = B(\lambda Q_1 + Q_2) + (\lambda R_1 + R_2)$ et, comme $\deg(\lambda R_1 + R_2) \leq \max\{\deg(R_1), \deg(R_2)\} < n+1$, on peut affirmer que $\lambda R_1 + R_2 = \varphi(\lambda P_1 + P_2)$, soit $\varphi(\lambda P_1 + P_2) = \lambda \varphi(P_1) + \varphi(P_2)$.
- Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, posons $M_k = \varphi(L_k)$, on a alors $AL_k = BQ_k + M_k$ où Q_k est un polynôme. En évaluant en un x_j , comme $B(x_j)$ est nul, on obtient

$$M_k(x_j) = A(x_j) L_k(x_j) = \delta_{j,k} A(x_j) = A(x_k) \delta_{j,k} = A(x_k) L_k(x_j).$$

Or, un polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$ est entièrement déterminé par ses valeurs en les $n+1$ points x_j ($0 \leq j \leq n$). On en déduit que $\varphi(L_k) = M_k = A(x_k) L_k$, donc le polynôme L_k est vecteur propre de l'endomorphisme φ associé à la valeur propre $A(x_k)$. Comme $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$, on dispose donc d'une base de $\mathbb{C}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de φ , donc φ est diagonalisable.

17. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, soient a et b deux réels distincts. Pour $P \in E$, on pose

$$\varphi(P) = (X - a)(X - b)P' - nXP.$$

Montrer que φ est un endomorphisme de E , et qu'il est diagonalisable.

La linéarité de φ est immédiate. De plus, soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

- si $\deg(P) = d < n$, alors $\deg(\varphi(P)) \leq d + 1 \leq n$, donc $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$;
 - on calcule $\varphi(X^n) = n(X - a)(X - b)X^{n-1} - nX^{n+1}$, qui est de degré au plus n en constatant l'annihilation des termes en X^{n+1} ;
- on déduit de tout cela que φ va bien de E dans E .

Dans la base $\mathcal{B} = (1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$, la matrice de φ est assez facile à écrire: en effet, après calculs, on a

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad \varphi((X - a)^k) = (k - n)(X - a)^{k+1} + (k(a - b) - na)(X - a)^k,$$

ce qui montre que la matrice $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est triangulaire inférieure, avec pour coefficients diagonaux les réels $k(a - b) - na$, $0 \leq k \leq n$, qui sont tous distincts. Donc φ admet $n+1$ valeurs propres distinctes avec $\dim(E) = n+1$, donc φ est diagonalisable.

18. Soit $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit P_n son polynôme caractéristique.

- a.** Calculer P_1 et P_2 . Pour $n \geq 3$, exprimer P_n en fonction de P_{n-1} et P_{n-2} .
- b.** Soit $x \in]-2, 2[$. Montrer que

$$P_n(x) = \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin(\alpha)}, \quad \text{avec} \quad \alpha = \arccos\left(\frac{x}{2}\right).$$

- c.** En déduire que A_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

- a.** On a $A_1 = (0)$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $P_1 = X$ et $P_2 = X^2 - 1$.

Un développement par rapport à la première colonne, puis un développement par rapport à la première ligne dans l'un des déterminants d'ordre $n-1$ obtenus donne

$$P_n(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & & (0) \\ -1 & x & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & x \end{vmatrix} = x P_{n-1}(x) - P_{n-2}(x) .$$

- b. Puisque la réponse est donnée, contentons-nous de la vérifier par récurrence double: en posant donc $x = 2 \cos(\alpha)$ avec $\alpha \in]0, \pi[$, on a bien

$$P_1(x) = x = 2 \cos(\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{\sin(\alpha)} ;$$

$$P_2(x) = x^2 - 1 = 4 \cos^2(\alpha) - 1 = \frac{\sin(3\alpha)}{\sin(\alpha)} .$$

En effet,

$$\begin{aligned} \sin(3\alpha) &= \sin(2\alpha) \cos(\alpha) + \cos(2\alpha) \sin(\alpha) \\ &= 2 \sin(\alpha) \cos^2(\alpha) + (2 \cos^2(\alpha) - 1) \sin(\alpha) \\ &= (4 \cos^2(\alpha) - 1) \sin(\alpha) . \end{aligned}$$

Et enfin, pour $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} 2 \cos(\alpha) \frac{\sin(n\alpha)}{\sin(\alpha)} + \frac{\sin((n-1)\alpha)}{\sin(\alpha)} &= \frac{2 \cos(\alpha) \sin(n\alpha) + \sin((n-1)\alpha)}{\sin(\alpha)} \\ &= \frac{\sin((n+1)\alpha) - \sin((n-1)\alpha) - \sin((n-1)\alpha)}{\sin(\alpha)} \\ &= \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin(\alpha)} . \end{aligned}$$

La suite $(P_n(x))_{n \geq 1}$ et la suite $\left(\frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin(\alpha)}\right)_{n \geq 1}$, ayant les mêmes deux premiers termes et vérifiant la même relation de récurrence double, coïncident donc.

- c. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, posons $\alpha_k = \frac{k\pi}{n+1}$ et $x_k = 2 \cos(\alpha_k) = 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$. On observe que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad P_n(x_k) = \frac{\sin((n+1)\alpha_k)}{\sin(\alpha_k)} = \frac{\sin(k\pi)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)} = 0 .$$

Les réels x_k sont tous distincts car la fonction cosinus est strictement décroissante (donc injective) sur l'intervalle $[0, \pi]$. On a donc trouvé n valeurs propres distinctes de la matrice A , on sait donc qu'il n'y en a pas d'autres, et que A est diagonalisable avec

$$\text{Sp}(A) = \left\{ 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) ; 1 \leq k \leq n \right\} .$$

Les grincheux et les handicapés de la trigo pourront me faire observer que, s'il s'agissait simplement de montrer que A est diagonalisable, on pouvait se contenter de dire qu'elle est

symétrique réelle. Ici, en prime, on a obtenu les valeurs propres. Cela valait bien un peu de calcul, non ?

19. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Combien y a-t-il de matrices M telles que $M^2 = A$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
Et dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

En commençant par la règle de Sarrus (même si cépabô), on obtient

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-1 & -3 & 0 \\ -3 & x+2 & 1 \\ 0 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^2(x+2) - 9(x-1) - (x-1) \\ &= (x-1)[(x-1)(x+2) - 10] = (x-1)(x^2 + x - 12) \\ &= (x-1)(x-3)(x+4). \end{aligned}$$

Donc $\text{Sp}(A) = \{-4, 1, 3\}$. La matrice A admet trois valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable (sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$, peu importe, le polynôme caractéristique étant scindé sur $\mathbb{R}$). On a $A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(-4, 1, 3)$ et $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ qu'il n'est pas utile d'expliciter. Si une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ vérifie $M^2 = A$, alors elle commute avec A , donc laisse stables les trois sous-espaces propres de la matrice A qui sont des droites vectorielles, ce qui entraîne que M est diagonalisable avec la même matrice de passage P , i.e. $M = P\Delta P^{-1}$ avec Δ diagonale. En effet, notons $\mathcal{B} = (U, V, W)$ une base de $\mathbb{K}^3$ constituée de vecteurs propres de A , l'endomorphisme f canoniquement associé à la matrice M doit laisser stables les trois droites vectorielles $\text{Vect}(U)$, $\text{Vect}(V)$, $\text{Vect}(W)$, donc doit aussi admettre U, V, W comme vecteurs propres, et donc doit être représenté dans la base $\mathcal{B}$ par une matrice diagonale. L'équation $M^2 = A$ se ramène alors à $\Delta^2 = D$ avec $\Delta = \text{diag}(a, b, c)$ diagonale. Cette

dernière équation se ramène enfin au système
$$\begin{cases} a^2 = -4 \\ b^2 = 1 \\ c^2 = 3 \end{cases},$$
 qui n'a aucune solution si

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et qui en a huit si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. En remultipliant par les matrices de passage P et P^{-1} , on obtient 8 matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ vérifiant $M^2 = A$, et aucune dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

20. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- Montrer que A est diagonalisable.
- Montrer qu'il existe une infinité de matrices $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $R^2 = A$.
- Soit $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$. Montrer que R est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

21. Soit a un réel, soit la matrice $L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \vdots & (0) & & \\ 1 & & & \\ a & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- a. À quelle condition sur le réel a la matrice L est-elle diagonalisable ?
- b. Calculer les puissances de L .

- a. La matrice L est triangulaire inférieure, donc ses valeurs propres et leurs multiplicités se lisent sur la diagonale, on a donc $\text{Sp}(L) = \{0, 1\}$, avec $m_0 = n - 2$ et $m_1 = 2$ (multiplicités). Par ailleurs, $\text{rg}(L) = 2$ visiblement, donc le sous-espace propre $E_0(L) = \text{Ker}(L)$ est de dimension $n - 2$ dans tous les cas. Pour déterminer la dimension du sous-espace propre

$E_1(L)$, observons la matrice $M = L - I_n = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & -1 & & (0) \\ \vdots & (0) & \ddots & \\ 1 & 0 & (0) & -1 \\ a & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Les opérations

élémentaires $C_1 \leftarrow C_1 + \sum_{j=2}^{n-1} C_j$ puis $L_n \leftarrow L_n + \sum_{i=2}^{n-1} L_i$ transforment M en une matrice M'

puis en une matrice M'' toutes de même rang, avec $M' = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 0 & -1 & & (0) \\ \vdots & (0) & \ddots & \\ 0 & 0 & (0) & -1 \\ a + n - 2 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$

et $M'' = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 0 & -1 & & (0) \\ \vdots & (0) & \ddots & \\ 0 & 0 & (0) & -1 \\ a + n - 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il est maintenant visible que

- si $a = 2 - n$, alors $\text{rg}(L - I_n) = \text{rg}(M'') = n - 2$, donc $\dim E_1(L) = 2$ et L est diagonalisable ;

- si $a \neq 2 - n$, alors $\text{rg}(L - I_n) = \text{rg}(M'') = n - 1$, donc $\dim E_1(L) = 1$ et L n'est pas diagonalisable.

Remarque. Ayant constaté que $\text{Sp}(L) = \{0, 1\}$, on peut aussi dire que A est diagonalisable si et seulement si elle admet $X(X - 1)$ comme polynôme annulateur, i.e. si et seulement si $L^2 = L$, ce qui donne une conclusion plus rapide et nous rapproche de la question **b**.

b. Notons $L(a)$ la matrice donnée dans l'énoncé pour mettre en valeur sa dépendance vis-à-vis du paramètre a . On fait un petit calcul à la main (*on peut essayer avec les pieds, mais c'est plus dur*), on obtient $L(a)L(b) = L(a + b + n - 2)$. On a donc $L(a)^2 = L(2a + n - 2)$, puis $L(a)^3 = L(3a + 2(n - 2))$, on conjecture que $L(a)^k = L(ka + (k - 1)(n - 2))$, et on vérifie que la proposition est héréditaire. La relation est valable pour $k \in \mathbb{N}^*$ mais pas pour $k = 0$ puisque, par convention, $L(a)^0 = I_n$.

Diagonalisation (théorie).

22. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad f(M) = AM .$$

Montrer que $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(A)$, et déterminer les sous-espaces propres de f en fonction de ceux de A . Montrer que f est diagonalisable si et seulement si A l'est.

- Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors

$$f(M) = \lambda M \iff AM = \lambda M \iff (A - \lambda I_n) M = 0 \iff \text{Im}(M) \subset \text{Ker}(A - \lambda I_n) .$$

Si le scalaire λ n'est pas valeur propre de A , alors $\text{Ker}(A - \lambda I_n) = \{0\}$ et la seule matrice M vérifiant $\text{Im}(M) \subset \{0\}$ est la matrice nulle. On en déduit que λ n'est pas valeur propre de f .

Si $\lambda \in \text{Sp}(A)$, alors $\text{Ker}(A - \lambda I_n) = E_\lambda(A)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, et il existe des matrices M non nulles vérifiant $\text{Im}(M) \subset \text{Ker}(A - \lambda I_n)$, donc $\lambda \in \text{Sp}(f)$. *En effet, si V est un vecteur non nul appartenant à $E_\lambda(A)$, la matrice carrée M d'ordre n dont toutes les colonnes sont égales à V vérifie $\text{Im}(M) = \text{Vect}(V) \subset E_\lambda(A)$.*

On a ainsi prouvé, par double inclusion, que $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(A)$.

- Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$. On vient de montrer qu'une matrice M appartient à $E_\lambda(f)$ si et seulement si $\text{Im}(M) \subset E_\lambda(A)$, c'est-à-dire si et seulement si les n colonnes de la matrice M appartiennent à $E_\lambda(A)$. L'espace vectoriel $E_\lambda(f)$ est alors "clairement" isomorphe au produit cartésien $(E_\lambda(A))^n$, puisque construire une matrice appartenant à $E_\lambda(f)$ revient à choisir ses n vecteurs-colonnes dans l'espace vectoriel $E_\lambda(A)$.

- On déduit de ce qui précède que, pour tout $\lambda \in \text{Sp}(A)$,

$$\dim(E_\lambda(f)) = \dim((E_\lambda(A))^n) = n \dim(E_\lambda(A)) .$$

Comme $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(A)$, on a

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(f)) = n \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) .$$

On en déduit les équivalences

$$f \text{ est diagonalisable} \iff \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)) = n^2 \iff \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = n \iff A \text{ est diagonalisable} .$$

23. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. Montrer que $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ est également

diagonalisable. *On utilisera la diagonalisation de la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.*

Diagonalisons d'abord $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Cette matrice est de rang 1, donc admet 0 comme valeur propre, le sous-espace propre associé (*i.e.* le noyau) étant manifestement la droite vectorielle engendrée par le vecteur $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Par ailleurs, l'image est clairement la droite vectorielle engendrée par le vecteur $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on vérifie la relation $JX_2 = 2X_2$, donc ce vecteur est vecteur propre associé à la valeur propre 2. La famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2)$ est donc une base de $\mathbb{K}^2$ constituée de vecteurs propres, ce qui permet la diagonalisation : $J = PDP^{-1}$, où $P = P_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{K}^2$ vers la base $\mathcal{B}$, et $D = \text{diag}(0, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On peut aussi expliciter $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. La relation de diagonalisation complètement explicitée est

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Par ailleurs, la matrice A est supposée diagonalisable : $A = Q\Delta Q^{-1}$ avec $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, et $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale.

Un calcul matriciel par blocs, s'inspirant de la relation (*) ci-dessus, montre que

$$\begin{pmatrix} Q & Q \\ -Q & Q \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & 2\Delta \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Q^{-1} & -Q^{-1} \\ Q^{-1} & Q^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q\Delta Q^{-1} & Q\Delta Q^{-1} \\ Q\Delta Q^{-1} & Q\Delta Q^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} = M,$$

les matrices $\begin{pmatrix} Q & Q \\ -Q & Q \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} Q^{-1} & -Q^{-1} \\ Q^{-1} & Q^{-1} \end{pmatrix}$ étant inverses l'une de l'autre. On a donc $M = RTR^{-1}$ avec $R = \begin{pmatrix} Q & Q \\ -Q & Q \end{pmatrix} \in \text{GL}_{2n}(\mathbb{K})$ et $T = \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & 2\Delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ diagonale : la matrice M est diagonalisable.

Autre solution. Comme A est diagonalisable, il existe une base $(X_1, \dots, X_r, X_{r+1}, \dots, X_n)$ de $\mathbb{K}^n$ constituée de vecteurs propres de A . Dans l'indexation de cette base, on a noté r le rang de la matrice A et on a choisi de noter $X_1, \dots, X_r$ des vecteurs propres de A correspondant à des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ non nulles (non nécessairement distinctes), les $n - r$ vecteurs suivants sont dans le noyau de A , c'est-à-dire sont des vecteurs propres pour la valeur propre 0 (*ceci est bien cohérent puisque, par le théorème du rang, le sous-espace $E_0(A) = \text{Ker}(A)$ est bien de dimension $n - r$*). Mais la matrice M est aussi de rang r (il y a manifestement autant de colonnes indépendantes dans M que dans A), donc $\text{Ker}(M) = E_0(M)$ est de dimension $2n - r$ par le théorème du rang, notons $(Z_{r+1}, \dots, Z_{2n})$ une base de $\text{Ker}(M)$ qui est un sous-espace de $\mathbb{K}^{2n}$. On vérifie par un petit calcul par blocs que si, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on pose $Z_i = \begin{pmatrix} X_i \\ X_i \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2n}$, alors $MZ_i = 2\lambda_i Z_i$, chaque Z_i est donc vecteur propre de M pour une valeur propre $2\lambda_i$ non nulle. Par ailleurs, il est immédiat de vérifier que les vecteurs $Z_1, \dots, Z_r$ de $\mathbb{K}^{2n}$ sont linéairement indépendants.

Les SEP étant en somme directe, on déduit enfin que la famille $(Z_1, \dots, Z_r, Z_{r+1}, \dots, Z_{2n})$ est libre et qu'elle est une base de $\mathbb{K}^{2n}$ constituée de vecteurs propres de M , ce qui permet de conclure que M est diagonalisable.

24. Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec B diagonalisable. Montrer que

$$AB^3 = B^3A \implies AB = BA.$$

 Écrivons $B = PDP^{-1}$ avec $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. La relation $AB^3 = B^3A$ s'écrit $APD^3P^{-1} = PD^3P^{-1}A$, ou encore $P^{-1}APD^3 = D^3P^{-1}AP$. Posons $P^{-1}AP = R$, de coefficients $r_{i,j}$. La relation obtenue $RD^3 = D^3R$ s'écrit

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad r_{i,j} \lambda_j^3 = r_{i,j} \lambda_i^3,$$

soit encore $r_{i,j}(\lambda_j^3 - \lambda_i^3) = 0$ pour tout couple (i, j) . On a donc, pour tout couple (i, j) ,

$$r_{i,j} = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda_j^3 = \lambda_i^3.$$

Mais la fonction $x \mapsto x^3$ est injective sur $\mathbb{R}$, on en déduit que, pour tout couple (i, j) ,

$$r_{i,j} = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda_j = \lambda_i,$$

soit $r_{i,j}(\lambda_j - \lambda_i) = 0$, soit $r_{i,j} \lambda_j = r_{i,j} \lambda_i$. Donc $RD = DR$. Puis $AB = BA$.