Semaine 8 : du 17/11 au 21/11

Réduction des endomorphismes

Notions de valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre pour un endomorphisme ou une matrice carrée. Propriétés des sous-espaces propres (*cf.* programme précédent).

Polynôme caractéristique d'une matrice carrée: définition et propriétés, écriture développée $\chi_A = X^n - \mathrm{tr}(A)\, X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie.

Les valeurs propres sont exactement les racines du polynôme caractéristique. Conséquences.

Notion de multiplicité d'une valeur propre. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit sur un sous-espace stable. Inégalité $1 \leq \dim\big(E_\lambda(u)\big) \leq m_\lambda$ pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$.

Expression du déterminant et de la trace à l'aide des valeurs propres lorsque χ_A est scindé.

Notion d'endomorphisme (ou de matrice) diagonalisable. Diagonalisation effective $A = PDP^{-1}$, interprétation des matrices P et D.

Condition suffisante de diagonalisablilité: si un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admet n valeurs propres distinctes (i.e. si son polynôme caractéristique est scindé à racines simples), alors il est diagonalisable.

Conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisablilité:

$u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable **ssi** $\displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) = E$ **ssi** $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim\big(E_\lambda(u)\big) = \dim(E)$.

$u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable **ssi** χ_u est scindé et $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u) \quad \dim E_\lambda(u) = m_\lambda$.

$u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable **ssi** u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

$u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable **ssi** $P = \displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ est annulateur de u.

Théorème de Cayley-Hamilton (*admis*).

Démonstrations de cours ou proches du cours

- Polynômes d'interpolation de Lagrange associés à une famille de $n+1$ scalaires distincts, ils forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
- Les sous-espaces propres sont en somme directe. Conséquences.
- Lien entre polynômes annulateurs et valeurs propres.
- Existence de valeurs propres pour $u \in \mathcal{L}(E)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et E de dimension impaire.
- Inégalité $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u) \quad 1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda$.
- u est diagonalisable $\iff \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) = E \iff \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim(E)$.
- $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement A et B sont diagonalisables.
- Théorème de Cayley-Hamilton. Preuve dans le cas diagonalisable.