

Lundi 1er septembre 2025, de 13h30h à 16h

Accueil des étudiants, puis...

Lecture du poly sur les suites numériques, approfondissement sur les suites définies par une récurrence linéaire d'ordre deux. Notion de limite. Suites réelles: limites et inégalités, théorème de la limite monotone, suites adjacentes. Exemples et exercices.

Pour mercredi 3 septembre: exos 4, 6, 8 et 9 de la feuille "suites" + exo 3 du poly de cours.

Mercredi 3 septembre 2025, de 8h à 10h

Correction de l'exo 3 du poly de cours.

Révisions de calcul asymptotique sur les suites.

TD classe entière (10h-11h30): exos 4, 6 et 8 de la feuille "suites".

Pour jeudi 4 septembre: exos 2, 12, 14 et 22(a, b) de la feuille "suites".

Jeudi 4 septembre 2025, de 10h à 12h

Notions sur les séries (convergence, sommes partielles, somme et restes en cas de convergence). Propriétés: linéarité de la somme, condition nécessaire pour qu'une série converge, exemple des séries géométriques, lien entre suites et séries (série télescopique associée à une suite).

TD groupe A (13h-14h30): exos 2, 12 et 22 de la feuille "suites".

TD groupe B (14h30- 16h): exos 2, 14 et 22 de la feuille "suites".

Pour lundi 8 septembre: exos 5 et 18 de la feuille "suites".

Lundi 8 septembre 2025, de 10h à 13h

Séries à termes positifs: conventions de calcul dans $[0, +\infty]$, CNS de convergence (les sommes partielles sont majorées), séries de référence (séries géométriques et séries de Riemann), théorèmes de comparaison. Règle de Riemann, règle de d'Alembert. Comparaison série-intégrale.

Correction des exercices 5 et 18a. de la feuille "suites".

Pour mercredi 10 septembre: exos 1 (a,b,c), 6 et 8 de la feuille "séries".

Mercredi 10 septembre 2025, de 8h à 10h

Séries à termes "quelconques": convergence absolue, elle entraîne la convergence.

Théorème spécial des séries alternées avec signe et majoration du reste en valeur absolue, exemples de séries semi-convergentes.

TD groupe B (10h-11h30): exos 1 et 6 de la feuille "séries" + début de l'exo 22.

TD groupe A (11h30-13h): exos 1, 6 et 8 de la feuille "séries".

Pour jeudi 11 septembre: exos 10, 13 et 16 de la feuille "séries".

Jeudi 11 septembre 2025, de 10h à 12h

Propriétés de $\mathbb{N}$ (toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum), principe de récurrence.

Notions d'ensemble dénombrable, d'ensemble au plus dénombrable, énumération. Les ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. Tout produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable. Les ensembles $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas dénombrables. Toute union au plus dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

TD groupe B (13h-14h30): exos 13 et 16 de la feuille “séries”.

TD groupe A (14h30- 16h): idem.

Pour lundi 15 septembre: exos 22, 24 et 25 de la feuille “séries”.

Samedi 13 septembre 2025, de 8h à 12h

DS 1 (durée: 4 heures): méthodes de Héron et de Newton + intégrales de Wallis, formule de Stirling et calcul de $\zeta(2)$.

Lundi 15 septembre 2025, de 10h à 13h

Formule de Stirling. Produit de Cauchy de deux séries numériques. Rappel sur les différentes formules de Taylor. La série exponentielle. Quelques mots sur les suites sommables, notamment toute série **absolument** convergente est “commutativement convergente”, somme sur une partie de $\mathbb{N}$, sommation par paquets.

Lecture du début du poly sur l'algèbre linéaire de 1ère année: structure d'espace vectoriel, sous-espaces, sous-espace engendré par une famille de vecteurs, familles (finies) libres, génératrices, bases. Somme de deux sous-espaces, somme directe, supplémentaires. Théorie de la dimension. Rang d'une famille de vecteurs. Formule de Grassmann.

Pour mercredi 17 septembre: exos 4, 6, 7 et 8 de la feuille “algèbre linéaire”.

Pour jeudi 25 septembre: DM 1

Mercredi 17 septembre 2025, de 8h à 10h

Lecture du poly sur l'algèbre linéaire de 1ère année: applications linéaires, noyau et image, endomorphismes, isomorphismes, automorphismes, groupe linéaire $GL(E)$, détermination d'une application linéaire (par l'action sur une base, par l'action sur deux supplémentaires), projecteurs et symétries, théorème du rang et sa “forme géométrique”, équations linéaires.

TD groupe A (10h-11h30): exos 4, 6 et 8 de la feuille “algèbre linéaire”.

TD groupe B (11h30-13h): idem.

Pour jeudi 18 septembre: exos 10, 11, 13 et 16 de la feuille “algèbre linéaire”.

Jeudi 18 septembre 2025, de 10h à 12h

Produit cartésien d'un nombre fini d'espaces vectoriels, dimension.

Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels de E , somme directe, décomposition de E en somme directe de s.e.v. qualifiés alors de "supplémentaires", en dimension finie

$\dim\left(\sum_{i=1}^m E_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \dim(E_i)$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.

TD groupe A (13h-14h30): exos 11, 13 et 16b. de la feuille "algèbre linéaire".

TD groupe B (14h30- 16h): exos 10, 13 et 16b. de la feuille "algèbre linéaire".

Pour lundi 22 septembre: exos 25 et 26 de la feuille "algèbre linéaire".

Lundi 22 septembre 2025, de 10h à 13h

Base adaptée à un sous-espace vectoriel de E (dimension finie), ou à une décomposition de E en somme directe de m sous-espaces. Décomposition en somme directe obtenue par partition d'une base.

Formes linéaires, hyperplans: exemple des formes linéaires coordonnées relativement à une base, définition d'un hyperplan comme noyau d'une forme linéaire non nulle, caractérisation comme sous-espace admettant comme supplémentaire une droite. Hyperplans en dimension finie, équations cartésiennes dans une base. Dimension de l'espace des solutions d'un système linéaire homogène.

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, matrices élémentaires $E_{i,j}$, relation $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$.

Relations $E_i E_j^\top = E_{i,j}$ et $E_i^\top E_j = \delta_{i,j}$, ainsi que $C_j(A) = A E_j$, $L_i(A) = E_i^\top A$ et $a_{i,j} = E_i^\top A E_j$. Matrices diagonales, triangulaires, symétriques, antisymétriques. Matrices inversibles. Transposition.

Pour mercredi 24 septembre: exos 20, 21, 41 et 46 de la feuille "algèbre linéaire".

Mercredi 24 septembre 2025, de 8h à 10h

Lecture du poly sur le calcul matriciel: représentation d'une application linéaire par une matrice, application linéaire canoniquement associée à une matrice, matrices de passage et changements de bases, matrices carrées semblables.

Matrices définies par blocs, opérations, matrices diagonales ou triangulaires par blocs.

Sous-espace stable par un endomorphisme, notion d'endomorphisme induit. Lien entre sous-espaces stables et matrices diagonales ou triangulaires par blocs.

TD groupe B (10h-11h30): exos 20, 21 et 41 de la feuille "algèbre linéaire".

TD groupe A (11h30-13h): exos 21, 41 et 46 de la feuille "algèbre linéaire".

Pour jeudi 25 septembre: exos 27, 28, 30 et 37 de la feuille "algèbre linéaire".

Jeudi 25 septembre 2025, de 10h à 12h

Si deux endomorphismes commutent, alors le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre.

Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme en dimension finie.

Polynômes d'endomorphismes ou de matrices, définitions, opérations. Polynômes annulateurs.

TD groupe B (13h-14h30): exos 27 et 37 de la feuille "algèbre linéaire".

TD groupe A (14h30- 16h): idem.

Pour lundi 29 septembre: exos 33, 47 et 50 de la feuille "algèbre linéaire".

Lundi 29 septembre 2025, de 10h à 13h

Utilisation des polynômes annulateurs: calcul de l'inverse d'une matrice, des puissances d'une matrice. Exercice 47 de la feuille "algèbre linéaire".

Fonctions continues par morceaux sur un segment, définition, propriétés. Construction de l'intégrale d'une telle fonction (d'abord à valeurs réelles, puis à valeurs complexes), propriétés.

Théorème fondamental de l'analyse, étude de fonctions de la forme $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$, formule d'intégration par parties, formule du changement de variable.

Pour mercredi 1er octobre: exos 6, 7 et 10 de la feuille "fonctions convexes, fonctions intégrables".

Mercredi 1er octobre 2025, de 8h à 10h

Fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque.

Intégrales généralisées sur $[a, +\infty[$, définition. Intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$.

Cas des fonctions positives: l'intégrale est convergente si et seulement si les intégrales partielles sont majorées, règle de comparaison avec $0 \leq f \leq g$.

Adaptation à un intervalle de la forme $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$.

TD groupe A (10h-11h30): exos 6 et 10 de la feuille "fonctions convexes, fonctions intégrables".

TD groupe B (11h30-13h): exos 6, 7 et 10 de la feuille "fonctions convexes, fonctions intégrables".

Pour jeudi 2 octobre: exos 1, 2, 17 (I_1) et 18 (I_1 et I_2) de la feuille "fonctions convexes, fonctions intégrables".

Jeudi 2 octobre 2025, de 10h à 12h

Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $]a, b]$ avec $-\infty \leq a < b < +\infty$.

L'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge. Nature de $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$.

Cas des intégrales “faussement généralisées”. Intégrales sur $]a, b[$.

Propriétés des intégrales généralisées: linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.

Changement de variable et intégration par parties dans des intégrales généralisées.

TD groupe A (13h-14h30): exos 1, 2, 17 (I_1), 18 (I_2) de la feuille “fonctions convexes, fonctions intégrables”.

TD groupe B (14h30- 16h): idem.

Pour lundi 6 octobre: exos 14, 15 et 19 de la feuille “fonctions convexes, fonctions intégrables”.

Samedi 4 octobre 2025, de 8h à 12h

DS 2 (durée: 4 heures): un exo d'algèbre linéaire + un exo sur les séries + problème (opérateurs de translation et de différence dans $\mathbb{R}_n[X]$ et polynômes de Hilbert).

Lundi 6 octobre 2025, de 10h à 13h

Intégrales généralisées absolument convergentes, la convergence absolue entraîne la convergence. Un exemple d'intégrale semi-convergente: l'intégrale de Dirichlet. Fonction intégrable sur un intervalle, exemple des fonctions de référence. Invariance par translation ou symétrie. Théorèmes de comparaison, notamment “toute fonction majorée en module par une fonction intégrable est intégrable”, pratique des études locales aux bornes.

Pour mercredi 8 octobre: exos 22, 25, 27 et 30 de la feuille “fonctions convexes, fonctions intégrables”.

Pour jeudi 16 octobre: DM 2

Mercredi 8 octobre 2025, de 8h à 10h

Théorème de stricte positivité.

Espaces vectoriels $L^1(I, \mathbb{K})$ et $L_c^2(I, \mathbb{R})$, produit scalaire et norme associée sur ce dernier, inégalité de Cauchy-Schwarz.

Suites de fonctions: définition de la convergence simple. Exemples. La convergence simple ne conserve pas la continuité des fonctions et n'autorise pas à intervertir limite et intégrale sur un segment.

TD groupe B (10h-11h30): exos 22, 27 et 30 de la feuille “fonctions convexes, fonctions intégrables”.

TD groupe A (11h30-13h): exos 22, 25 et 27 de la feuille “fonctions convexes, fonctions intégrables”.

Pour jeudi 9 octobre: exos 28, 29 et 34 de la feuille “fonctions convexes, fonctions intégrables”.

Jeudi 9 octobre 2025, de 10h à 12h

Introduction de la notation $\|f\|_\infty$, convergence uniforme. Exemples. Idée de majoration uniforme. Cas de la convergence uniforme sur tout segment.

Régularité de la limite d'une suite de fonctions: théorème de continuité.

TD groupe B (13h-14h30): exos 16, 29 et 34 de la feuille "fonctions convexes, fonctions intégrables".

TD groupe A (14h30- 16h): exos 16, 28 et 29 de la feuille "fonctions convexes, fonctions intégrables".

Pour lundi 13 octobre: exos 1, 2 et 7 de la feuille "suites et séries de fonctions".

Lundi 13 octobre 2025, de 10h à 13h

Théorème d'interversion limite-intégrale sur un segment. Théorème de dérivation (classe $\mathcal{C}^1$) de la limite d'une suite de fonctions, extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Séries de fonctions: convergence simple, convergence uniforme, convergence normale. La convergence normale entraîne la convergence uniforme, la réciproque est fausse (contre-exemple).

Contrôle 1 sur la notion d'intégrabilité (30 minutes).

Pour mercredi 15 octobre: exos 1, 2, 7, 11 et 14 de la feuille "suites et séries de fonctions".

Mercredi 15 octobre 2025, de 8h à 10h

Théorèmes concernant la régularité de la somme d'une série de fonctions: continuité, intégration terme à terme sur un segment, dérivabilité avec extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, théorème de la double limite (*admis*).

TD groupe A (10h-11h30): exos 1, 2 et 14 de la feuille "suites et séries de fonctions".

TD groupe B (11h30-13h): idem.

Pour jeudi 16 octobre: exos 10, 15 et 17 de la feuille "suites et séries de fonctions".

Jeudi 16 octobre 2025, de 10h à 12h

Rappels sur les opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes d'une matrice, interprétation en termes de produit matriciel, conservation du rang. Algorithme du pivot de Gauss, algorithme de Gauss-Jordan pour inverser une matrice carrée (inversible!). Complexité de l'algorithme.

Lecture du poly (début) sur les déterminants: déterminant d'une famille de n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n rapporté à une base, déterminant d'un endomorphisme en dimension finie, déterminant d'une matrice carrée. Définitions et propriétés générales.

Effet des opérations élémentaires sur le déterminant d'une matrice, cofacteurs, développement par rapport à une ligne ou une colonne.

Déterminant de Vandermonde.

TD groupe A (13h-14h30): exos 15 et 17 de la feuille "suites et séries de fonctions".

TD groupe B (14h30- 16h): idem.

Pour lundi 3 novembre: exos 16 et 23 de la feuille "suites et séries de fonctions" + exos 1, 3, 5, 6, 8 et 11 de la feuille "déterminants".

VACANCES de TOUSSAINT

Lundi 3 novembre 2025, de 10h à 13h

Polynômes d'interpolation de Lagrange, lien avec le déterminant de Vandermonde.
Déterminants de matrices triangulaires par blocs.

Définition des vecteurs propres et des valeurs propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Un vecteur x non nul est vecteur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$ si et seulement si la droite vectorielle $\text{Vect}(x)$ est stable par u . Définition d'une valeur propre, caractérisation par: $u - \lambda \text{id}_E$ non injectif.

Correction de l'exo 16 de la feuille "suites et séries de fonctions".

Pour mercredi 5 novembre: exos 1, 3, 5, 6, 8, 11 et 13 de la feuille "déterminants" + exo 2 de la feuille "réduction des endomorphismes".

Pour jeudi 13 novembre: DM 3

Mercredi 5 novembre 2025, de 8h à 10h

Spectre en dimension finie, valeurs propres d'une matrice carrée.

Si E est **de dimension finie**, alors

$$\lambda \in \text{Sp}(u) \iff u - \lambda \text{id}_E \notin \text{GL}(E) \iff \det(\lambda \text{id}_E - u) = 0.$$

Sous-espaces propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Si deux endomorphismes commutent, les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre. Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda) x$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$. Conséquence: si P est un polynôme annulateur de u , alors les valeurs propres de u sont racines de P . Exemples.

TD groupe B (10h-11h30): exos 3, 5 et 13 de la feuille "déterminants".

TD groupe A (11h30-13h): exos 1, 5 et 6 de la feuille "déterminants".

Pour jeudi 6 novembre: exos 2, 3 et 8 de la feuille "réduction des endomorphismes".

Jeudi 6 novembre 2025, de 10h à 12h

Les sous-espaces propres sont en somme directe. Conséquences: en dimension finie n , $\text{Card}(\text{Sp}(u)) \leq n$ et $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u)) \leq n$. Une famille de vecteurs propres associés

à des valeurs propres distinctes est libre.

Polynôme caractéristique d'une matrice carrée d'ordre n , écriture

$$\chi_A = X^n - \text{tr}(A) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A).$$

Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire.

Les valeurs propres sont exactement les racines du polynôme caractéristique.

TD groupe B (13h-14h30): exos 2, 3 et 8 de la feuille "réduction des endomorphismes".

TD groupe A (14h30- 16h): exos 2 et 3 de la feuille "réduction des endomorphismes".

Pour lundi 10 novembre: exos 10, 12 et 13 de la feuille "réduction des endomorphismes".

Samedi 8 novembre 2025, de 8h à 12h

DS 3 (durée: 4 heures): un exercice sur les séries de fonctions + problème sur la décomposition LU.

Lundi 10 novembre 2025, de 10h à 13h

Polynôme caractéristique de deux matrices semblables, d'une transposée. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie.

Les valeurs propres sont exactement les racines du polynôme caractéristique.

Conséquences: en dimension n , il y a au plus n valeurs propres ; un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, ou d'un $\mathbb{R}$ -espace de dimension impaire, a au moins une valeur propre.

Multiplicité d'une valeur propre. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit. Inégalité $1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda$ pour $\lambda \in \text{Sp}(u)$. Expression de la trace et du déterminant à l'aide des valeurs propres lorsque le polynôme caractéristique est scindé.

Correction des exos 10 et 12 de la feuille "réduction des endomorphismes".

Pour mercredi 12 novembre: exos 4, 6, 13 et 15 de la feuille "réduction des endomorphismes".

Mercredi 12 novembre 2025, de 8h à 10h

Notion de matrice ou d'endomorphisme diagonalisable, diagonalisation effective $A = PDP^{-1}$, interprétation de D et de P . Condition suffisante de diagonalisabilité: si un endomorphisme d'un e.v. de dimension n admet n valeurs propres distinctes (ou si son polynôme caractéristique est scindé à racines simples), alors il est diagonalisable et les sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité: la somme (directe) des sous-espaces propres est E , ou bien la somme des dimensions des sous-espaces propres est $n = \dim(E)$.

TD groupe A (10h-11h30): exos 4, 13 et 15 de la feuille "réduction des endomorphismes".

TD groupe B (11h30-13h): idem.

Pour jeudi 13 novembre: exos 16, 19, 21a et 22 de la feuille "réduction des endomorphismes".

Jeudi 13 novembre 2025, de 10h à 12h

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre est égale à la multiplicité.

Théorème de Cayley-Hamilton (*admis*).

Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, ou bien si et seulement si le polynôme $P = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$ est annulateur de u .

TD groupe A (13h-14h30): exos 19, 21a et 22 de la feuille "réduction des endomorphismes".

TD groupe B (14h30- 16h): exos 19 et 21a de la feuille "réduction des endomorphismes".

Pour lundi 17 novembre: exos 20, 25 et 27 de la feuille "réduction des endomorphismes".

Lundi 17 novembre 2025, de 10h à 13h

L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable est encore diagonalisable.

Endomorphismes et matrices trigonalisables. Interprétation en termes de sous-espaces stables. Un endomorphisme (ou une matrice) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Applications de la réduction: calculs de puissances de matrices, expression de suites vectorielles définies par une relation de récurrence linéaire d'ordre un.

Pour mercredi 19 novembre: exos 33, 34, 42 et 44 de la feuille "réduction des endomorphismes".