

PARTIE A. Recherche de sous-espaces stables. Étude d'exemples.

1. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note u et v les endomorphismes de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ canoniquement associés aux matrices A et B respectivement.

On notera $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

- a. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme u , ainsi que le sous-espace $\text{Im}(u)$.
- b. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme v , ainsi que le sous-espace $\text{Im}(v)$.

2. Soient les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On note f et g les endomorphismes de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associés aux matrices M et N respectivement.

- a. Diagonaliser la matrice M . *On pourra observer que les valeurs propres et vecteurs propres de M "se voient" sans faire de calculs, on expliquera alors les observations faites.*
- b. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$.

3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n , soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M . On note $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Soit H un hyperplan de $\mathbb{K}^n$, admettant pour équation cartésienne $c_1x_1 + \dots + c_nx_n = 0$, les c_i ($1 \leq i \leq n$) étant des scalaires non tous nuls, i.e.

$$H = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{i=1}^n c_i x_i = 0 \right\}.$$

On introduit le vecteur-colonne $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^n$.

- a. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$. Vérifier que $X \in H \iff C^\top X = 0$.
 - b. En déduire que, si C est vecteur propre de la matrice $M^\top$, alors l'hyperplan H est stable par l'endomorphisme f .
 - c. Démontrer la réciproque: si l'hyperplan H est stable par f , alors C est vecteur propre de la matrice $M^\top$.
- 4.a. En utilisant les résultats de la question 3., déterminer les plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ qui sont stables par l'endomorphisme f introduit à la question 2. Donner ensuite la liste de tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par f . Vérifier que les plans stables se décomposent en sommes de deux droites stables.
- b. De façon analogue, déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme g introduit à la question 2.

PARTIE B. Recherche de sous-espaces stables. Étude théorique.

Dans cette partie, f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E non réduit à $\{0\}$.

- 5.a. Montrer qu'il existe au moins deux sous-espaces de E stables par f , et donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui n'admet que deux sous-espaces stables.
- b. Montrer que, si E est de dimension finie $n \geq 2$ et si f est non nul et non injectif, alors il existe au moins trois sous-espaces de E stables par f , et au moins quatre lorsque n est impair.
- c. Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ admettant exactement trois sous-espaces stables.

- 6.a. Montrer que tout sous-espace de E engendré par une famille de vecteurs propres de f est stable par f .
- b. Montrer que, si f admet un sous-espace propre de dimension au moins égale à 2, alors il existe une infinité de droites de E stables par f .
- c. Que dire de f si tous les sous-espaces vectoriels de E sont stables par f ?
7. Dans cette question, E est supposé de dimension finie.
- a. Montrer que, si f est diagonalisable, alors tout sous-espace vectoriel F de E admet un supplémentaire stable par f . *On pourra introduire une base de F , et une base de E constituée de vecteurs propres de f .*
- b. Montrer que, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et si tout sous-espace de E stable par f admet un supplémentaire dans E stable par f , alors f est diagonalisable. *On pourra considérer le sous-espace $S = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_{\lambda}(f)$.* Qu'en est-il si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?
8. On suppose E de dimension finie n . Montrer que f est trigonalisable si et seulement s'il existe une famille $(F_0, F_1, \dots, F_n)$ de sous-espaces de E stables par f tels que $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n$ et $\dim(F_k) = k$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

PARTIE C. Une CNS de stabilité (cas diagonalisable).

Dans cette partie, n et p sont deux entiers naturels au moins égaux à 2, f est un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension n , qui admet p valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note $E_i = E_{\lambda_i}(f)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i .

L'objectif est de démontrer qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par f si et seulement si $F = \bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i)$.

9. Soit F un s.e.v. de E tel que $F = \bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i)$. Montrer que F est stable par f .
10. Réciproquement, soit F un s.e.v. de E stable par f . Soit x un vecteur non nul de F .
- a. Justifier l'existence et l'unicité de $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$ tel que $x = \sum_{i=1}^p x_i$.
- b. Si on pose $J_x = \{i \in \llbracket 1, p \rrbracket \mid x_i \neq 0\}$, alors J_x est une partie non vide de l'intervalle entier $\llbracket 1, p \rrbracket$, soit r son cardinal ($1 \leq r \leq p$). Quitte à renuméroter les valeurs propres (et les sous-espaces propres associés), on peut supposer que $J_x = \llbracket 1, r \rrbracket$. On a ainsi $x = \sum_{i=1}^r x_i$ avec $x_i \in E_i \setminus \{0\}$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$. On pose $V_x = \text{Vect}(x_1, \dots, x_r)$.
- Montrer que la famille $\mathcal{B}_x = (x_1, \dots, x_r)$ est une base de V_x .
- c. Montrer que, pour tout $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$, le vecteur $f^{j-1}(x)$ appartient à V_x , et donner la matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{F}_x = (x, f(x), \dots, f^{r-1}(x))$ relativement à la base $\mathcal{B}_x$.
- d. Montrer que $\mathcal{F}_x = (f^{j-1}(x))_{1 \leq j \leq r}$ est une base de V_x .
- e. En déduire que, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, le vecteur x_i appartient à F , et conclure.