DEVOIR MAISON de MATHÉMATIQUES numéro 3
COMMENTAIRES
PSI2 2025-2026

Ce problème avait pour objet de démontrer quelques identités mathématiques connues sous le nom d'identités eulériennes, en utilisant les différents théorèmes du cours sur les séries de fonctions pour justifier les différentes interversions (somme-dérivée, somme-intégrale, somme-limite).

2. Ne pas oublier de mentionner que chacune des fonctions u_n est continue sur $]0,1[$.

Noter aussi que les fonctions u_n, pour $n \geq 1$, sont négatives sur $]0,1[$, ce qui a occasionné quelques erreurs dans les majorations puisque, pour montrer la convergence normale, c'est la **valeur absolue** $\left|u_n(x)\right|$, et non $u_n(x)$ lui-même, qu'il faut majorer **uniformément**.

3. Éviter l'écriture $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x+k}$ car cela reviendrait à considérer la somme d'une série divergente.

En effet, les séries $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{x+k}$ et $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{x-k}$ sont toutes deux divergentes (*comparer à la série harmonique*!), c'est seulement en regroupant les termes deux par deux sous la forme $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \left(\frac{1}{x+k} + \frac{1}{x-k}\right) = \sum_{k\geq 1} \frac{2x}{x^2-k^2}$ que l'on obtient une série convergente (si x n'est pas un entier relatif).

4. et 6. Il est préférable de commencer par travailler sur des sommes partielles (sinon, on risque de se retrouver avec des sommes de séries divergentes, *cf.* ci-dessus). Les calculs sont parfois un peu approximatifs!

7. J'ai lu des choses bizarroïdes sur l'interprétation graphique de la propriété **(P1)**. La bonne réponse est que la courbe de g admet le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ comme centre de symétrie.

9. Sur de nombreuses copies, les développements asymptotiques sont traités de façon satisfaisante, donc je suis plutôt content de vous dans l'ensemble. Il reste toutefois quelques irréductibles qui continuent à manipuler des équivalents n'importe comment (notamment en les additionnant, ce qui est incorrect). Voici, pour celles et ceux qui ont encore un peu de mal avec ces techniques, un développement correct de $g(x) - \dfrac{1}{x}$ en zéro afin d'en obtenir un équivalent:

$$\begin{aligned}
\pi\,\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{x} &= \pi\,\frac{1 - \frac{\pi^2 x^2}{2} + o(x^3)}{\pi x - \frac{\pi^3 x^3}{6} + o(x^4)} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\,\frac{1 - \frac{\pi^2 x^2}{2} + o(x^3)}{1 - \frac{\pi^2 x^2}{6} + o(x^3)} - \frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{x}\left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{2} + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{6} + o(x^3)\right)^{-1} - \frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{x}\left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{2} + o(x^3)\right)\left(1 + \frac{\pi^2 x^2}{6} + o(x^3)\right) - \frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{x}\left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{3} + o(x^3)\right) - \frac{1}{x} = -\frac{x}{3} + o(x^2)\ ,
\end{aligned}$$

d'où l'on peut déduire que $g(x) - \dfrac{1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x}{3}$.

10. Le prolongement par continuité au point 1 est parfois oublié, il se déduit de celui en 0 par la propriété de symétrie **(P1)**.

11. Beaucoup pensent à itérer pour obtenir $\left|h\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)\right| = M$ pour tout n. **Il faut alors mentionner la continuité de h en 0** pour arriver à $\left|h(0)\right| = M$.

14. La relation de **Q14.** se déduit de celle de **Q12.** en dérivant... à condition de le justifier correctement. Ici, **c'est sur la série des dérivées $\sum u_n'$ qu'il faut vérifier une convergence uniforme**, au moins sur tout segment.

15. Il y a différentes façons d'obtenir la valeur de $\zeta(2)$, la plus simple étant sans doute de faire tendre x vers zéro dans la relation de **Q14.**, mais alors il faut justifier une **interversion somme-limite** (théorème de la double limite):

$$\text{Pourquoi a-t-on} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{x \to 0} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} \right) \quad ???$$

17. Interversion série-intégrale (ou "intégration terme à terme") parfois expédiée un peu vite.

18. Là aussi, j'aurais aimé plus de détails: commencer par travailler sur des sommes et des produits partiels (donc comportant un nombre fini de termes ou de facteurs), puis passer à la limite en mentionnant clairement la continuité de la fonction exponentielle.