

Réduction des endomorphismes

Tout le chapitre, i.e. le programme précédent, plus:

L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable est aussi diagonalisable.

Endomorphismes et matrices trigonalisables, interprétation en termes de sous-espaces stables.

CNS : $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable ssi χ_u est scindé.

Applications de la réduction: calculs de puissances de matrices, expression de suites vectorielles satisfaisant une relation de récurrence linéaire.

Séries entières

Notion de série entière associée à une suite de coefficients (a_n) .

Lemme d'Abel: si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors, pour tout z complexe tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Définition du rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ comme la borne supérieure, dans $[0, +\infty]$, de l'ensemble des $r \in \mathbb{R}_+$ tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.

La série entière converge absolument pour tout z tel que $|z| < R$, diverge grossièrement pour tout z tel que $|z| > R$. Elle converge normalement sur tout disque fermé $\overline{D}(0, r)$ avec $r < R$.

Définition du disque ouvert de convergence $D(0, R)$, de l'intervalle ouvert de convergence $] -R, R[$.

Comparaison: si $|a_n| \leq |b_n|$ à partir d'un certain rang, ou bien si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$.

Si $|a_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |b_n|$, alors $R_a = R_b$. Utilisations de la règle de d'Alembert.

Rayon de convergence de la somme de deux séries entières.

Une série entière et sa "dérivée formelle" ont le même rayon de convergence, ou encore: les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

Démonstrations de cours ou proches du cours

- Existence de valeurs propres pour $u \in \mathcal{L}(E)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et E de dimension impaire.
- Inégalité $\forall \lambda \in \text{Sp}(u) \quad 1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda$.
- u est diagonalisable $\iff \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u) = E \iff \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim(E)$.
- $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si A et B sont diagonalisables.
- Théorème de Cayley-Hamilton. Preuve dans le cas diagonalisable.
- Lemme d'Abel. Définition du rayon de convergence. Nature de la série entière $\sum a_n z^n$ pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq R$.
- Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.