

Éléments propres.

1. Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, soit l'endomorphisme $\Phi : f \mapsto f''$. Déterminer ses éléments propres.

Soit λ un réel. On recherche les fonctions f vérifiant $f'' = \lambda f$, ce sont donc les solutions de l'équation différentielle $y'' - \lambda y = 0$ (équation linéaire du second ordre à coefficients constants, sans second membre). On peut donc affirmer (*cours de première année*) que tout réel λ est valeur propre de Φ , et que les sous-espaces propres $E_\lambda(\Phi) = \text{Ker}(\Phi - \lambda \text{id}_E)$ sont tous de dimension deux. Plus précisément,

- pour $\lambda = 0$, le sous-espace propre $E_0(\Phi) = \text{Ker } \Phi$ est constitué des fonctions affines $x \mapsto Ax + B$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$;

- pour $\lambda > 0$, posons $\omega = \sqrt{\lambda}$, le sous-espace propre $E_\lambda(\Phi)$ est constitué des solutions de l'équation $y'' - \omega^2 y = 0$, ce sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto A \text{ch}(\omega x) + B \text{sh}(\omega x), \quad \text{ou encore} \quad x \mapsto a e^{\omega x} + b e^{-\omega x},$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ ou $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- pour $\lambda < 0$, posons $\omega = \sqrt{-\lambda}$, le sous-espace propre $E_\lambda(\Phi)$ est constitué des solutions de l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$, ce sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x), \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

- Montrer que, si $\lambda \in \mathbb{K}^*$ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est aussi valeur propre de $v \circ u$.
- Si E est de dimension finie, montrer que $\text{Sp}(v \circ u) = \text{Sp}(u \circ v)$.
- Si E est de dimension infinie, montrer que 0 peut être valeur propre de $u \circ v$ sans être valeur propre de $v \circ u$. On pourra, dans $E = \mathbb{K}[X]$, considérer l'opérateur de dérivation

$$D : P \mapsto P' \quad \text{et un "opérateur de primitivation" } \Phi : P \mapsto \int_0^X P(t) dt.$$

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ une valeur propre **non nulle** de $u \circ v$, il existe alors un vecteur x **non nul** de E tel que $u \circ v(x) = \lambda x$. En appliquant v , on obtient $v \circ u \circ v(x) = \lambda v(x)$, soit $(v \circ u)(v(x)) = \lambda v(x)$. Or, le vecteur $v(x)$ est **non nul** : en effet, si on avait $v(x) = 0_E$, cela entraînerait $\lambda x = u(v(x)) = 0_E$ donc $x = 0_E$ puisque λ est non nul, et c'est absurde. Le scalaire λ est donc aussi valeur propre de $v \circ u$, le vecteur **non nul** $v(x)$ étant un vecteur propre associé.
- En dimension finie, on peut utiliser les déterminants. Rappelons que le spectre est alors l'ensemble des valeurs propres (*faux en dimension infinie*). Si λ est un scalaire non nul, il appartient à $\text{Sp}(u \circ v)$ si et seulement s'il appartient à $\text{Sp}(v \circ u)$ d'après la question **a**. Il reste à étudier le cas $\lambda = 0$, mais rappelons que 0 est valeur propre d'un endomorphisme si et seulement si cet endomorphisme est non injectif, c'est-à-dire (en dimension finie) de déterminant nul. Donc

$$0 \in \text{Sp}(u \circ v) \iff \det(u \circ v) = 0 \iff \det(u) \det(v) = 0 \iff \det(v \circ u) = 0 \iff 0 \in \text{Sp}(v \circ u).$$

- Considérons les endomorphismes D et Φ de $\mathbb{R}[X]$ aimablement prêtés par l'énoncé. Notons d'abord que, si P est un polynôme, $\Phi(P)$ est la "primitive formelle" de P qui

$$\text{s'annule en zéro, autrement dit si } P = \sum_{k=0}^d a_k X^k, \text{ alors } \Phi(P) = \sum_{k=0}^d a_k \frac{X^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{d+1} \frac{a_{k-1}}{k} X^k.$$

Il est immédiat de vérifier que, pour tout polynôme P , on a $D(\Phi(P)) = P$, donc $D \circ \Phi = \text{id}_E$ et l'endomorphisme $D \circ \Phi$ est injectif et n'admet donc pas 0 pour valeur propre.

Par contre, pour tout polynôme P , on a $\Phi(D(P)) = P - P(0)$: si $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, alors

$\Phi(D(P)) = \sum_{k=1}^d a_k X^k = P - a_0$; ainsi, $\text{Ker}(\Phi \circ D)$ est l'ensemble $\mathbb{K}_0[X] \simeq \mathbb{K}$ des polynômes constants et l'endomorphisme $\Phi \circ D$ n'est pas injectif donc admet 0 pour valeur propre.

3. Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme f de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ défini par

$$f : P \mapsto (X^2 - 1)P'' + 2X P'.$$

L'endomorphisme f diminue les degrés: on vérifie facilement que $\deg(f(P)) \leq \deg(P)$ pour tout polynôme P . Il en résulte que, pour tout n entier naturel, le sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par f , et que l'endomorphisme induit f_n est représenté, dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$, par une matrice T_n triangulaire supérieure. Explicitons cette matrice T_n , pour cela calculons les images par f des polynômes X^k . On a immédiatement $f(1) = 0$, $f(X) = 2X$ et, pour $k \geq 2$, $f(X^k) = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}$. D'où

$$T_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 6 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}.$$

Comme T_n est triangulaire, on a

$$\text{Sp}(f_n) = \text{Sp}(T_n) = \{0, 2, 6, \dots, n(n+1)\} = \{k(k+1) ; 0 \leq k \leq n\}.$$

Enfin, un réel est valeur propre de f si et seulement s'il est valeur propre de f_n pour au moins un entier n (*vérification laissée à l'improbable lecteur*). En conclusion, les valeurs propres de f sont les $k(k+1)$ pour k entier naturel.

4. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme f de $E = \mathbb{R}_n[X]$ défini par $f(P) = (X^2 - 1)P' - nXP$.

Notons d'abord que f est bien un endomorphisme de E : la linéarité est immédiate, et on constate ensuite que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le polynôme image $f(X^k)$ est de degré au plus n (il est de degré $k+1$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, et $f(X^n)$ est de degré n grâce à une annihilation des termes de degré $n+1$). Donc f va bien de E dans E .

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors λ est valeur propre de f si et seulement s'il existe un polynôme P non nul, de degré au plus n , tel que $f(P) = \lambda P$, donc si et seulement si l'équation différentielle

(E_λ) : $(x^2 - 1) y' - (nx + \lambda) y = 0$ admet une solution polynomiale non nulle de degré au plus n . Résolvons cette équation sur l'un des intervalles $] -\infty, -1[$, $] -1, 1[$ ou $]1, +\infty[$ sur lesquels il est possible de la mettre sous sa "forme normale" $y' = \frac{nx + \lambda}{x^2 - 1} y$. Après une décomposition en éléments simples, on a

$$(E_\lambda) \iff y' = \left(\frac{n + \lambda}{2} \frac{1}{x - 1} + \frac{n - \lambda}{2} \frac{1}{x + 1} \right) y,$$

ce qui se résout en

$$y = C |x - 1|^{\frac{n + \lambda}{2}} |x + 1|^{\frac{n - \lambda}{2}}.$$

Les fonctions obtenues sont polynomiales de degré au plus n (en fait, si elles sont polynomiales, elles sont de degré n exactement) sur les intervalles considérés si et seulement si les exposants $\frac{n + \lambda}{2}$ et $\frac{n - \lambda}{2}$ sont des entiers naturels de l'intervalle $\llbracket 0, n \rrbracket$. On en déduit que λ est nécessairement de la forme $2k - n$ avec $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Pour un tel λ , on s'aperçoit alors que le polynôme $P = (X - 1)^k (X + 1)^{n - k}$ est un vecteur propre associé. On a obtenu $n + 1$ valeurs propres distinctes, il ne peut y en avoir d'autres puisque $\dim(E) = n + 1$.

Bilan. $\text{Sp}(f) = \{2k - n ; 0 \leq k \leq n\}$ et $E_{2k - n}(f) = \text{Vect}((X - 1)^k (X + 1)^{n - k})$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, les sous-espaces propres sont des droites vectorielles. *On peut alors affirmer que f est diagonalisable puisqu'on a construit une base de vecteurs propres, ou bien puisqu'il a $n + 1$ valeurs propres distinctes en dimension $n + 1$.*

5. Soit f l'endomorphisme de l'espace vectoriel $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ défini par $f(u) = v$ avec

$$v_0 = u_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \frac{u_{n-1} + u_n}{2}.$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f .

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, discutons l'équation $f(u) = \lambda u$ avec $u \in E$. Elle se traduit par

$$\begin{cases} u_0 = \lambda u_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{u_{n-1} + u_n}{2} = \lambda u_n \end{cases}.$$

- si $\lambda = 1$, on peut choisir u_0 quelconque, la deuxième condition se traduit alors par $u_{n-1} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Les solutions de l'équation $f(u) = u$ sont les suites constantes (qui forment un s.e.v. de dimension 1) ;

- si $\lambda \neq 1$, la première condition impose $u_0 = 0$, la deuxième donne $(2\lambda - 1)u_n = u_{n-1}$, d'où deux sous-cas:

▷ si $\lambda = \frac{1}{2}$, alors $u_{n-1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la seule solution est la suite nulle ;

▷ si $\lambda \neq \frac{1}{2}$, alors $u_n = \frac{u_{n-1}}{2\lambda - 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et partant de $u_0 = 0$, on obtient aussi

que u est la suite nulle.

Finalement, la seule valeur propre de l'endomorphisme f est 1, et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle constituée des suites constantes.

6.a. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice canoniquement associée. Soit par ailleurs H un hyperplan de $\mathbb{K}^n$ d'équation cartésienne $v_1x_1 + \dots + v_nx_n = 0$, avec $v_1, \dots, v_n$ scalaires non tous nuls. Montrer que H est stable par u si et seulement le vecteur

$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ est vecteur propre de la matrice $A^\top$.

b. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement représenté par la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par u .

a. Posons $W = A^\top V = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$. On notera qu'un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{K}^n$ appartient à

H si et seulement si on a $V^\top X = 0$.

- Supposons V vecteur propre de $A^\top$, alors il existe un scalaire λ tel que $A^\top V = \lambda V$, donc en transposant $V^\top A = \lambda V^\top$. Si X appartient à H , on a alors $V^\top X = 0$, d'où $V^\top (AX) = (V^\top A)X = \lambda V^\top X = 0$, ce qui signifie que le vecteur AX est aussi dans H . Ainsi, H est stable par la matrice A ou, ce qui revient au même, par l'endomorphisme u .

- Supposons H stable par u . Ainsi, pour tout vecteur X de H , on a $AX \in H$, c'est-à-dire

$V^\top AX = 0$, soit encore $W^\top X = 0$. Autrement dit, tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de H vérifie

l'équation cartésienne $w_1x_1 + \dots + w_nx_n = 0$. Deux cas se présentent alors:

- si $W = 0$, i.e. si tous les coefficients w_i sont nuls, alors $V \in \text{Ker}(A^\top)$, donc V est bien vecteur propre de $A^\top$ (pour la valeur propre 0) ;
- si les w_i ne sont pas tous nuls, l'hyperplan H' d'équation cartésienne $w_1x_1 + \dots + w_nx_n = 0$ est confondu avec H (on a vu ci-dessus que $H \subset H'$ et ils ont la même dimension car ce sont des hyperplans). Mais deux équations linéaires définissant le même hyperplan sont proportionnelles (*résultat du cours que l'on peut aussi énoncer sous la forme: deux formes linéaires non nulles ayant le même noyau sont proportionnelles*), il en résulte qu'il existe un scalaire λ (alors non nul) tel que $W = \lambda V$, i.e. $A^\top V = \lambda V$, ce qu'il fallait démontrer.

b. Il y a déjà deux s.e.v. triviaux qui sont stables par u , ce sont:

- le s.e.v. $\{0_E\}$, de dimension 0 ;
- l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier, de dimension 3.

Les droites vectorielles stables (dimension 1) sont celles dirigées par des vecteurs propres, recherchons donc ces derniers. Un petit calcul, laissé à l'estimable lecteur, montre que $\chi_A = (X - 2)(X^2 - 2X + 2)$, donc la seule valeur propre **réelle** de la matrice A (i.e. la seule valeur propre de l'endomorphisme u) est $\lambda = 2$. Le sous-espace propre est la droite

vectorielle D engendrée par le vecteur propre $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Cette droite D est alors l'unique

droite vectorielle stable.

En utilisant la question **a.**, on voit que les plans stables sont obtenus en recherchant les vecteurs propres de la matrice $A^\top$. Cette matrice a les mêmes valeurs propres que A , à savoir seulement 2 comme valeur propre réelle, mais le sous-espace propre est la droite engendrée

par le vecteur $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le seul plan vectoriel stable par u est alors celui d'équation cartésienne $V^\top X = 0$, i.e. $y + z = 0$.

7. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice **strictement stochastique**, i.e. telle que

$$\begin{aligned} \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad a_{i,j} &> 0 ; \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} &= 1 . \end{aligned}$$

a. Montrer que 1 est valeur propre de A .

b. Montrer que $\forall \lambda \in \text{Sp}(A) \quad |\lambda| \leq 1$.

c*. Montrer que, si $\lambda \in \text{Sp}(A)$ est de module 1, alors $\lambda = 1$.

a. La relation $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$ signifie que $AV = V$, avec $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc le nombre 1 est valeur propre de A , et V est un vecteur propre associé.

b. Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$, soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associée, posons $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. Alors $\|X\|_\infty > 0$ puisque X n'est pas le vecteur nul. Comme $AX = \lambda X$,

on a, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la relation $\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = \lambda x_i$. Donc

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad |\lambda| |x_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j} x_j| \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} \|X\|_\infty = \|X\|_\infty .$$

Cette majoration étant vraie pour tout indice i , elle "passe au sup", i.e. $|\lambda| \|X\|_\infty \leq \|X\|_\infty$. Comme $\|X\|_\infty > 0$, on déduit $|\lambda| \leq 1$.

c. Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$ de module 1, soit $X = (x_1 \ \cdots \ x_n)^\top$ un vecteur propre associé. Soit $s \in \llbracket 1, n \rrbracket$ un indice tel que $|x_s| = \|X\|_\infty$. On a, d'après **a.**, la relation

$$|x_s| = \left| \sum_{j=1}^n a_{s,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n a_{s,j} |x_j| \leq \sum_{j=1}^n a_{s,j} \|X\|_\infty = \|X\|_\infty = |x_s| .$$

L'égalité entre les termes extrêmes entraîne l'égalité à chaque intermédiaire.

De $\sum_{j=1}^n a_{s,j} |x_j| = \sum_{j=1}^n a_{s,j} \|X\|_\infty$, que l'on peut écrire aussi $\sum_{j=1}^n a_{s,j} (\|X\|_\infty - |x_j|) = 0$, on déduit d'abord que chaque terme de cette dernière somme est nul (c'est une somme de

termes positifs qui est nulle) et, les coefficients de la matrice A étant tous non nuls, on déduit ensuite que $|x_j| = \|X\|_\infty = |x_s|$ pour tout j .

Ensuite, de $\left| \sum_{j=1}^n a_{s,j} x_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{s,j} x_j|$, on déduit que les nombres complexes $a_{s,j} x_j$ sont positivement liés (cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire), i.e. ils ont le même argument (ils sont tous non nuls) donc il existe un réel θ tel que $x_j = e^{i\theta} |x_j|$ pour tout j . Finalement, $x_j = e^{i\theta} \|X\|_\infty$ pour tout j , ce qui signifie que $X = e^{i\theta} \|X\|_\infty V$, où V est le vecteur-colonne introduit en **a**. Comme $AV = V$, on déduit que $AX = X$, puis que $\lambda = 1$.

Remarque. Cette démonstration prouve aussi que $E_1(A) = \text{Vect}(V)$.

8. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, soit $v \in \mathcal{L}(E)$ commutant avec u . On pose $f = u + v$. Montrer que f et v ont les mêmes valeurs propres.

• Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de v , alors il existe $x \in E$, non nul, tel que $v(x) = \lambda x$. Comme u est nilpotent, l'ensemble $\{j \in \mathbb{N}^* \mid u^j(x) \neq 0_E\}$ est une partie non vide, elle admet alors un minimum k , on a alors $u^{k-1}(x) \neq 0_E$ et $u^k(x) = 0_E$.

Attention. Cet entier k n'est pas forcément l'**indice de nilpotence** de u défini par $p = \min\{j \in \mathbb{N}^* \mid u^j = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$. On a seulement $k \leq p$ en général.

En posant $y = u^{k-1}(x)$, on a alors $u(y) = 0_E$ et on dispose d'un vecteur y **non nul** tel que

$$f(y) = v(y) = v(u^{k-1}(x)) = u^{k-1}(v(x)) = u^{k-1}(\lambda x) = \lambda u^{k-1}(x) = \lambda y$$

(en effet, si v commute avec u , il commute aussi avec u^{k-1} , c'est une récurrence immédiate). Donc λ est aussi valeur propre de f .

• Comme $v = (-u) + f$ avec $-u$ nilpotent, les endomorphismes $-u$ et f commutent puisque $(-u) \circ f = -u \circ (u + v) = -u^2 - u \circ v = -u^2 - v \circ u = f \circ (-u)$, on peut dire que f et v jouent des rôles symétriques, il est donc inutile de rédiger une réciproque: toute valeur propre de f est donc aussi valeur propre de v .

Polynôme caractéristique.

9. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 3 & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ admet une unique valeur propre réelle strictement positive.

Le lecteur instruit et perspicace aura remarqué que A est une "matrice-compagnon" .

Pour calculer son polynôme caractéristique $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ -3 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -n & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$, on peut

effectuer l'opération élémentaire $L_n \leftarrow L_n + xL_{n-1} + x^2L_{n-2} + \cdots + x^{n-1}L_1$, puis développer par rapport à la dernière ligne ; on obtient $\chi_A(x) = x^n - (x^{n-1} + 2x^{n-2} + \cdots + (n-1)x + n)$. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on peut écrire $\chi_A(x) = x^n f(x)$, avec

$$f(x) = 1 - \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \cdots + \frac{n-1}{x^{n-1}} + \frac{n}{x^n} \right) = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{k}{x^k}.$$

Il est immédiat que la fonction f a une dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$; par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, donc f établit une bijection (dérivable strictement croissante) de $\mathbb{R}_+^*$ vers $] -\infty, 1[$. Il existe donc un unique réel strictement positif α tel que $f(\alpha) = 0$, c'est-à-dire tel que $\chi_A(\alpha) = 0$, et la matrice A admet donc pour seule valeur propre réelle strictement positive ce nombre α .

- 10.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible, soit $B = A^{-1}$. Quelle relation y a-t-il entre les polynômes caractéristiques χ_A et χ_B ?

Pour $x \in \mathbb{K}$ non nul, on écrit

$$\begin{aligned} \chi_B(x) &= \det(xI_n - A^{-1}) = \det[A^{-1}(xA - I_n)] = \det(A^{-1}) \cdot x^n \cdot \det\left(A - \frac{1}{x}I_n\right) \\ &= \frac{x^n}{\det(A)} (-1)^n \det\left(\frac{1}{x}I_n - A\right) = \frac{(-1)^n x^n}{\det(A)} \chi_A\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^n}{\chi_A(0)} \chi_A\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Bien sûr, $\chi_B(0) = (-1)^n \det(A^{-1}) = \frac{(-1)^n}{\det(A)} = \frac{1}{\chi_A(0)}$.

Autrement dit, si $\chi_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$, avec $a_0 = \chi_A(0) = (-1)^n \det(A)$ qui est non nul, alors

$$\chi_B = \frac{1}{a_0} (a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + 1).$$

- 11.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie n . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de rang 2. Exprimer son polynôme caractéristique χ_f à l'aide de $\text{tr}(f)$ et $\text{tr}(f^2)$.

Si $\text{rg}(f) = 2$, alors $\text{Ker}(f)$ est de dimension $n - 2$. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{n-2}, e_{n-1}, e_n)$ est une base de E adaptée à $\text{Ker}(f)$, alors la matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0_{n-2} & B \\ 0_{2, n-2} & A \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, i.e. les $n - 2$ premières colonnes sont nulles. Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a $\chi_f(x) = \chi_M(x) = x^{n-2} \chi_A(x)$. Or, $\chi_A(x) = x^2 - \text{tr}(A)x + \det(A)$, et on vérifie que

$$\det(A) = ad - bc = \frac{1}{2} \left((a+d)^2 - (a^2 + 2bc + d^2) \right) = \frac{1}{2} \left(\operatorname{tr}(A)^2 - \operatorname{tr}(A^2) \right).$$

Comme, par ailleurs, $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(f)$ et $\operatorname{tr}(A^2) = \operatorname{tr}(f^2)$ - cette dernière relation par exemple puisque $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & BA \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$ avec des blocs de même format que ci-dessus - on conclut que

$$\chi_f = X^{n-2} \left(X^2 - \operatorname{tr}(f) X + \frac{1}{2} \left(\operatorname{tr}(f)^2 - \operatorname{tr}(f^2) \right) \right).$$

- 12.** Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soient les matrices $M = \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_n \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -B & I_n \end{pmatrix}$, $M'' = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -B & \lambda I_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$. En effectuant les produits matriciels MM' et $M''M$, montrer que les matrices AB et BA ont le même polynôme caractéristique: $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

On calcule $MM' = \begin{pmatrix} \lambda I_n - AB & A \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$ et $M''M = \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ 0_n & \lambda I_n - BA \end{pmatrix}$.

Les deux étant triangulaires supérieures par blocs, on déduit les relations

$$\det(MM') = \det(\lambda I_n - AB) = \chi_{AB}(\lambda),$$

$$\det(M''M) = \det(\lambda I_n) \det(\lambda I_n - BA) = \lambda^n \chi_{BA}(\lambda).$$

Mais on a aussi $\det(MM') = \det(M) \det(M') = \det(M)$ et

$$\det(M''M) = \det(M'') \det(M) = \lambda^n \det(M) = \lambda^n \det(MM').$$

On en déduit que $\lambda^n \chi_{BA}(\lambda) = \lambda^n \chi_{AB}(\lambda)$ pour tout scalaire λ , et donc que $\chi_{BA}(\lambda) = \chi_{AB}(\lambda)$ pour tout λ scalaire **non nul**. Les fonctions polynomiales χ_{AB} et χ_{BA} coïncident en une infinité de points, on conclut que $\chi_{BA} = \chi_{AB}$.

Diagonalisation (pratique).

- 13.** Sans écrire aucun calcul, déterminer les éléments propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 8 & -12 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.

La matrice A est visiblement de rang 1, donc le nombre 0 est valeur propre et le sous-espace propre associé $E_0(A) = \operatorname{Ker} A$ est de dimension 2 (théorème du rang) : on voit par ailleurs que ce sous-espace est le plan d'équation cartésienne $x + 2y - 3z = 0$, une base est par

exemple constituée des deux vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si A admet une autre valeur propre $\lambda \neq 0$, un vecteur propre associé appartient nécessairement à $\text{Im } A$. Or, $\text{Im } A$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, et on vérifie que $AX_3 = 15X_3$, donc 15 est valeur propre de A et le sous-espace propre associé est $E_{15}(A) = \text{Im}(A) = \text{Vect}(X_3)$. On pouvait aussi utiliser la trace.

En conclusion, $\text{Sp}(A) = \{0 ; 15\}$, la matrice A est diagonalisable, on a par exemple

$$A = PDP^{-1}, \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

- 14.** Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En déduire toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

La matrice A est triangulaire inférieure, on lit donc immédiatement ses valeurs propres : $\text{Sp}(A) = \{1 ; 4 ; 9\}$. Comme elle a trois valeurs propres distinctes, on peut affirmer qu'elle est diagonalisable et que ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles. En notant (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$, on a immédiatement $E_1(A) = \text{Vect}(e_3)$ et $E_4(A) = \text{Vect}(e_2)$. En résolvant le système $AX = 9X$, on a facilement $E_9(A) = \text{Vect}(e_1 - e_2 - e_3)$. On en déduit la diagonalisation de la matrice A , soit $A = PDP^{-1}$, avec par exemple

$$P = \text{diag}(9, 4, 1) \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit M une matrice telle que $M^2 = A$. En notant m et a les endomorphismes de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associés aux matrices A et M respectivement, on a $m^2 = a$, ce qui entraîne que les endomorphismes a et m commutent ($a \circ m = m \circ a = m^3$), donc m laisse stables les sous-espaces propres de a , à savoir les trois droites vectorielles énumérées ci-dessus ; cela revient aussi à dire que les vecteurs $e_1 - e_2 - e_3$, e_2 et e_3 sont aussi vecteurs propres de m ; cela revient encore à dire que la matrice M est diagonalisable avec la même matrice de passage P (autrement dit dans la même base que la matrice A), on a donc nécessairement $M = P\Delta P^{-1}$, où $\Delta = \text{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$ est une matrice diagonale. Réciproquement, une telle matrice M (de la forme $P\Delta P^{-1}$) vérifie $M^2 = A$ si et seulement si $\Delta^2 = D$, autrement dit **ssi** $\alpha^2 = 9$, $\beta^2 = 4$, $\gamma^2 = 1$. Il y a donc exactement huit (2^3) matrices M solutions du problème posé : ce sont les matrices $M = P\Delta P^{-1}$, avec $\Delta = \text{diag}(3\varepsilon, 2\varepsilon', \varepsilon'')$, avec $(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'') \in \{-1 ; 1\}^3$. Pour les amateurs de calculs explicites, on obtient les quatre matrices

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et leurs opposées (s'il n'y a pas d'erreur... *mais qui ira vérifier ?*).

15. Rechercher toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 + M = J$, avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On pourra exploiter le fait qu'une telle matrice M commute nécessairement avec J .

Commençons par diagonaliser J (le détail des calculs est laissé au lecteur) : $J = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Si une matrice M vérifie $M^2 + M = J$, alors elle commute avec J , donc les sous-espaces propres de J , c'est-à-dire les droites vectorielles $E_0(J) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $E_2(J) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont stables par M , ce qui signifie que ces deux vecteurs sont vecteurs propres de M , donc M est diagonalisable à l'aide de la même matrice de passage P . On a donc $M = P\Delta P^{-1}$, où Δ est diagonale : $\Delta = \text{diag}(\alpha, \beta)$. La relation $M^2 + M = J$ se ramène alors à $\Delta^2 + \Delta = D$, soit encore à $\begin{cases} \alpha^2 + \alpha = 0 \\ \beta^2 + \beta = 2 \end{cases}$. Il y a quatre couples (α, β) solutions, à savoir $(0, 1)$, $(0, -2)$, $(-1, 1)$ et $(-1, -2)$, auxquels correspondent respectivement les quatre matrices M solutions du problème :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

16. Soient $n+1$ nombres complexes distincts $x_0, \dots, x_n$, soit le polynôme $B = \prod_{k=0}^n (X - x_k)$. Soit

d'autre part $A \in \mathbb{C}_n[X]$ un polynôme. On considère l'application φ qui, à tout polynôme P de $\mathbb{C}_n[X]$, associe le reste de la division euclidienne du polynôme AP par B .

- Montrer que φ peut être considéré comme un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$.
- On note $(L_0, \dots, L_n)$ la base de Lagrange associée aux points d'interpolation $x_0, \dots, x_n$. Calculer $\varphi(L_k)$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En déduire que l'endomorphisme φ est diagonalisable.

- L'application φ va bien de $\mathbb{C}_n[X]$ dans $\mathbb{C}_n[X]$ puisque le reste de la division euclidienne considérée doit être de degré strictement inférieur à $\deg(B) = n+1$. Montrons sa linéarité : soient $P_1 \in \mathbb{C}_n[X]$, $P_2 \in \mathbb{C}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, il existe alors un unique couple $(Q_1, R_1) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ tel que $AP_1 = BQ_1 + R_1$, et aussi un unique couple $(Q_2, R_2) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ tel que $AP_2 = BQ_2 + R_2$. On a alors $R_1 = \varphi(P_1)$ et $R_2 = \varphi(P_2)$. De ces relations, on déduit que $A(\lambda P_1 + P_2) = B(\lambda Q_1 + Q_2) + (\lambda R_1 + R_2)$ et, comme $\deg(\lambda R_1 + R_2) \leq \max\{\deg(R_1), \deg(R_2)\} < n+1$, on peut affirmer que $\lambda R_1 + R_2 = \varphi(\lambda P_1 + P_2)$, soit $\varphi(\lambda P_1 + P_2) = \lambda \varphi(P_1) + \varphi(P_2)$.
- Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, posons $M_k = \varphi(L_k)$, on a alors $AL_k = BQ_k + M_k$ où Q_k est un polynôme. En évaluant en un x_j , comme $B(x_j)$ est nul, on obtient

$$M_k(x_j) = A(x_j) L_k(x_j) = \delta_{j,k} A(x_j) = A(x_k) \delta_{j,k} = A(x_k) L_k(x_j).$$

Or, un polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$ est entièrement déterminé par ses valeurs en les $n+1$ points x_j ($0 \leq j \leq n$). On en déduit que $\varphi(L_k) = M_k = A(x_k) L_k$, donc le polynôme L_k est vecteur propre de l'endomorphisme φ associé à la valeur propre $A(x_k)$. Comme $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$, on dispose donc d'une base de $\mathbb{C}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de φ , donc φ est diagonalisable.

17. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, soient a et b deux réels distincts. Pour $P \in E$, on pose

$$\varphi(P) = (X - a)(X - b)P' - nXP.$$

Montrer que φ est un endomorphisme de E , et qu'il est diagonalisable.

La linéarité de φ est immédiate. De plus, soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

- si $\deg(P) = d < n$, alors $\deg(\varphi(P)) \leq d + 1 \leq n$, donc $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$;
 - on calcule $\varphi(X^n) = n(X - a)(X - b)X^{n-1} - nX^{n+1}$, qui est de degré au plus n en constatant l'annihilation des termes en X^{n+1} ;
- on déduit de tout cela que φ va bien de E dans E .

Dans la base $\mathcal{B} = (1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$, la matrice de φ est assez facile à écrire: en effet, après calculs, on a

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad \varphi((X - a)^k) = (k - n)(X - a)^{k+1} + (k(a - b) - na)(X - a)^k,$$

ce qui montre que la matrice $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est triangulaire inférieure, avec pour coefficients diagonaux les réels $k(a - b) - na$, $0 \leq k \leq n$, qui sont tous distincts. Donc φ admet $n+1$ valeurs propres distinctes avec $\dim(E) = n+1$, donc φ est diagonalisable.

18. Soit $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit P_n son polynôme caractéristique.

- a. Calculer P_1 et P_2 . Pour $n \geq 3$, exprimer P_n en fonction de P_{n-1} et P_{n-2} .
- b. Soit $x \in]-2, 2[$. Montrer que

$$P_n(x) = \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin(\alpha)}, \quad \text{avec} \quad \alpha = \arccos\left(\frac{x}{2}\right).$$

- c. En déduire que A_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

- a. On a $A_1 = (0)$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $P_1 = X$ et $P_2 = X^2 - 1$.

Un développement par rapport à la première colonne, puis un développement par rapport à la première ligne dans l'un des déterminants d'ordre $n-1$ obtenus donne

$$P_n(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & & (0) \\ -1 & x & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & x \end{vmatrix} = x P_{n-1}(x) - P_{n-2}(x) .$$

- b. Puisque la réponse est donnée, contentons-nous de la vérifier par récurrence double: en posant donc $x = 2 \cos(\alpha)$ avec $\alpha \in]0, \pi[$, on a bien

$$P_1(x) = x = 2 \cos(\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{\sin(\alpha)} ;$$

$$P_2(x) = x^2 - 1 = 4 \cos^2(\alpha) - 1 = \frac{\sin(3\alpha)}{\sin(\alpha)} .$$

En effet,

$$\begin{aligned} \sin(3\alpha) &= \sin(2\alpha) \cos(\alpha) + \cos(2\alpha) \sin(\alpha) \\ &= 2 \sin(\alpha) \cos^2(\alpha) + (2 \cos^2(\alpha) - 1) \sin(\alpha) \\ &= (4 \cos^2(\alpha) - 1) \sin(\alpha) . \end{aligned}$$

Et enfin, pour $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} 2 \cos(\alpha) \frac{\sin(n\alpha)}{\sin(\alpha)} + \frac{\sin((n-1)\alpha)}{\sin(\alpha)} &= \frac{2 \cos(\alpha) \sin(n\alpha) + \sin((n-1)\alpha)}{\sin(\alpha)} \\ &= \frac{\sin((n+1)\alpha) - \sin((n-1)\alpha) - \sin((n-1)\alpha)}{\sin(\alpha)} \\ &= \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin(\alpha)} . \end{aligned}$$

La suite $(P_n(x))_{n \geq 1}$ et la suite $\left(\frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin(\alpha)}\right)_{n \geq 1}$, ayant les mêmes deux premiers termes et vérifiant la même relation de récurrence double, coïncident donc.

- c. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, posons $\alpha_k = \frac{k\pi}{n+1}$ et $x_k = 2 \cos(\alpha_k) = 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$. On observe que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad P_n(x_k) = \frac{\sin((n+1)\alpha_k)}{\sin(\alpha_k)} = \frac{\sin(k\pi)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)} = 0 .$$

Les réels x_k sont tous distincts car la fonction cosinus est strictement décroissante (donc injective) sur l'intervalle $[0, \pi]$. On a donc trouvé n valeurs propres distinctes de la matrice A , on sait donc qu'il n'y en a pas d'autres, et que A est diagonalisable avec

$$\text{Sp}(A) = \left\{ 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) ; 1 \leq k \leq n \right\} .$$

Les grincheux et les handicapés de la trigo pourront me faire observer que, s'il s'agissait simplement de montrer que A est diagonalisable, on pouvait se contenter de dire qu'elle est

symétrique réelle. Ici, en prime, on a obtenu les valeurs propres. Cela valait bien un peu de calcul, non ?

19. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Combien y a-t-il de matrices M telles que $M^2 = A$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?
Et dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

En commençant par la règle de Sarrus (même si cépabô), on obtient

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-1 & -3 & 0 \\ -3 & x+2 & 1 \\ 0 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^2(x+2) - 9(x-1) - (x-1) \\ &= (x-1)[(x-1)(x+2) - 10] = (x-1)(x^2 + x - 12) \\ &= (x-1)(x-3)(x+4). \end{aligned}$$

Donc $\text{Sp}(A) = \{-4, 1, 3\}$. La matrice A admet trois valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable (sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$, peu importe, le polynôme caractéristique étant scindé sur $\mathbb{R}$). On a $A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(-4, 1, 3)$ et $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ qu'il n'est pas utile d'expliciter. Si une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ vérifie $M^2 = A$, alors elle commute avec A , donc laisse stables les trois sous-espaces propres de la matrice A qui sont des droites vectorielles, ce qui entraîne que M est diagonalisable avec la même matrice de passage P , i.e. $M = P\Delta P^{-1}$ avec Δ diagonale. En effet, notons $\mathcal{B} = (U, V, W)$ une base de $\mathbb{K}^3$ constituée de vecteurs propres de A , l'endomorphisme f canoniquement associé à la matrice M doit laisser stables les trois droites vectorielles $\text{Vect}(U)$, $\text{Vect}(V)$, $\text{Vect}(W)$, donc doit aussi admettre U, V, W comme vecteurs propres, et donc doit être représenté dans la base $\mathcal{B}$ par une matrice diagonale. L'équation $M^2 = A$ se ramène alors à $\Delta^2 = D$ avec $\Delta = \text{diag}(a, b, c)$ diagonale. Cette

dernière équation se ramène enfn au système $\begin{cases} a^2 = -4 \\ b^2 = 1 \\ c^2 = 3 \end{cases}$, qui n'a aucune solution si

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et qui en a huit si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. En remultipliant par les matrices de passage P et P^{-1} , on obtient 8 matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ vérifiant $M^2 = A$, et aucune dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

20. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- Montrer que A est diagonalisable.
- Montrer qu'il existe une infinité de matrices $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $R^2 = A$.
- Soit $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$. Montrer que R est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

- On calcule $\chi_A(x) = (x-2)^2(x-4)$, donc $\text{Sp}(A) = \{2; 4\}$, avec 2 valeur propre double, et 4 valeur propre simple. On constate ensuite que $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1,

donc par le théorème du rang, le sous-espace propre $E_2(A)$ est de dimension deux. Cela suffit pour affirmer que A est diagonalisable.

On peut bien sûr achever la diagonalisation : $A = PDP^{-1}$, avec par exemple $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \text{diag}(2, 2, 4) = \begin{pmatrix} 2I_2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, calculs laissés au lecteur.

b. La matrice I_2 admet dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une infinité de “racines carrées”, à savoir toutes les matrices de symétries, en particulier les matrices représentant (en b.o.n.) une réflexion par rapport à un axe du plan euclidien, c’est-à-dire les matrices orthogonales indirectes, de la forme $\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$ avec $t \in \mathbb{R}$. Par un calcul par blocs immédiat, les matrices

$M(t) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $M(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos t & \sqrt{2} \sin t & 0 \\ \sqrt{2} \sin t & -\sqrt{2} \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ vérifient $M(t)^2 = D$, où $D = \text{diag}(2, 2, 4)$. Enfin, les matrices $R(t) = P M(t) P^{-1}$, avec $t \in \mathbb{R}$, vérifient

$$R(t)^2 = P M(t)^2 P^{-1} = P D P^{-1} = A,$$

et il y a bien une infinité de telles matrices distinctes.

c. Soit $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$. La matrice A est diagonalisable avec $\text{Sp}(A) = \{2; 4\}$, donc elle admet pour polynôme annulateur $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (X - \lambda) = (X - 2)(X - 4)$, autrement dit

$$0 = (A - 2I_3)(A - 4I_3) = (R^2 - 2I_3)(R^2 - 4I_3) = (R - \sqrt{2}I_3)(R + \sqrt{2}I_3)(R - 2I_3)(R + 2I_3),$$

donc R admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, le polynôme $F = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X - 2)(X + 2)$, donc R est diagonalisable.

21. Soit a un réel, soit la matrice $L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \vdots & (0) & & \\ 1 & & & \\ a & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- a. À quelle condition sur le réel a la matrice L est-elle diagonalisable ?
- b. Calculer les puissances de L .

- a.** La matrice L est triangulaire inférieure, donc ses valeurs propres et leurs multiplicités se lisent sur la diagonale, on a donc $\text{Sp}(L) = \{0, 1\}$, avec $m_0 = n - 2$ et $m_1 = 2$ (multiplicités). Par ailleurs, $\text{rg}(L) = 2$ visiblement, donc le sous-espace propre $E_0(L) = \text{Ker}(L)$ est de dimension $n - 2$ dans tous les cas. Pour déterminer la dimension du sous-espace propre

$E_1(L)$, observons la matrice $M = L - I_n = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & -1 & & (0) \\ \vdots & (0) & \ddots & \\ 1 & 0 & (0) & -1 \\ a & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Les opérations

élémentaires $C_1 \leftarrow C_1 + \sum_{j=2}^{n-1} C_j$ puis $L_n \leftarrow L_n + \sum_{i=2}^{n-1} L_i$ transforment M en une matrice M'

puis en une matrice M'' toutes de même rang, avec $M' = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 0 & -1 & & & (0) \\ \vdots & (0) & \ddots & & \\ 0 & 0 & (0) & -1 & \\ a+n-2 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$

et $M'' = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 0 & -1 & & & (0) \\ \vdots & (0) & \ddots & & \\ 0 & 0 & (0) & -1 & \\ a+n-2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il est maintenant visible que

- si $a = 2 - n$, alors $\text{rg}(L - I_n) = \text{rg}(M'') = n - 2$, donc $\dim E_1(L) = 2$ et L est diagonalisable ;
- si $a \neq 2 - n$, alors $\text{rg}(L - I_n) = \text{rg}(M'') = n - 1$, donc $\dim E_1(L) = 1$ et L n'est pas diagonalisable.

Remarque. Ayant constaté que $\text{Sp}(L) = \{0, 1\}$, on peut aussi dire que A est diagonalisable si et seulement si elle admet $X(X - 1)$ comme polynôme annulateur, i.e. si et seulement si $L^2 = L$, ce qui donne une conclusion plus rapide et nous rapproche de la question **b**.

b. Notons $L(a)$ la matrice donnée dans l'énoncé pour mettre en valeur sa dépendance vis-à-vis du paramètre a . On fait un petit calcul à la main (*on peut essayer avec les pieds, mais c'est plus dur*), on obtient $L(a)L(b) = L(a+b+n-2)$. On a donc $L(a)^2 = L(2a+n-2)$, puis $L(a)^3 = L(3a+2(n-2))$, on conjecture que $L(a)^k = L(ka+(k-1)(n-2))$, et on vérifie que la proposition est héréditaire. La relation est valable pour $k \in \mathbb{N}^*$ mais pas pour $k = 0$ puisque, par convention, $L(a)^0 = I_n$.

Diagonalisation (théorie).

22. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad f(M) = AM.$$

Montrer que $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(A)$, et déterminer les sous-espaces propres de f en fonction de ceux de A . Montrer que f est diagonalisable si et seulement si A l'est.

- Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors

$$f(M) = \lambda M \iff AM = \lambda M \iff (A - \lambda I_n)M = 0 \iff \text{Im}(M) \subset \text{Ker}(A - \lambda I_n).$$

Si le scalaire λ n'est pas valeur propre de A , alors $\text{Ker}(A - \lambda I_n) = \{0\}$ et la seule matrice M vérifiant $\text{Im}(M) \subset \{0\}$ est la matrice nulle. On en déduit que λ n'est pas valeur propre de f .

Si $\lambda \in \text{Sp}(A)$, alors $\text{Ker}(A - \lambda I_n) = E_\lambda(A)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, et il existe des matrices M non nulles vérifiant $\text{Im}(M) \subset \text{Ker}(A - \lambda I_n)$, donc $\lambda \in \text{Sp}(f)$. En effet, si V est un vecteur

non nul appartenant à $E_\lambda(A)$, la matrice carrée M d'ordre n dont toutes les colonnes sont égales à V vérifie $\text{Im}(M) = \text{Vect}(V) \subset E_\lambda(A)$.

On a ainsi prouvé, par double inclusion, que $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(A)$.

- Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$. On vient de montrer qu'une matrice M appartient à $E_\lambda(f)$ si et seulement si $\text{Im}(M) \subset E_\lambda(A)$, c'est-à-dire si et seulement si les n colonnes de la matrice M appartiennent à $E_\lambda(A)$. L'espace vectoriel $E_\lambda(f)$ est alors "clairement" isomorphe au produit cartésien $(E_\lambda(A))^n$, puisque construire une matrice appartenant à $E_\lambda(f)$ revient à choisir ses n vecteurs-colonnes dans l'espace vectoriel $E_\lambda(A)$.

- On déduit de ce qui précède que, pour tout $\lambda \in \text{Sp}(A)$,

$$\dim(E_\lambda(f)) = \dim((E_\lambda(A))^n) = n \dim(E_\lambda(A)).$$

Comme $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(A)$, on a

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(f)) = n \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)).$$

On en déduit les équivalences

$$f \text{ est diagonalisable} \iff \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)) = n^2 \iff \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = n \iff A \text{ est diagonalisable}.$$

23. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. Montrer que $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ est également diagonalisable. On utilisera la diagonalisation de la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Diagonalisons d'abord $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Cette matrice est de rang 1, donc admet 0 comme valeur propre, le sous-espace propre associé (*i.e.* le noyau) étant manifestement la droite vectorielle engendrée par le vecteur $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Par ailleurs, l'image est clairement la droite vectorielle engendrée par le vecteur $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on vérifie la relation $JX_2 = 2X_2$, donc ce vecteur est vecteur propre associé à la valeur propre 2. La famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2)$ est donc une base de $\mathbb{K}^2$ constituée de vecteurs propres, ce qui permet la diagonalisation : $J = PDP^{-1}$, où $P = P_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{K}^2$ vers la base $\mathcal{B}$, et $D = \text{diag}(0, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On peut aussi expliciter $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. La relation de diagonalisation complètement explicitée est

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Par ailleurs, la matrice A est supposée diagonalisable : $A = Q\Delta Q^{-1}$ avec $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, et $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale.

Un calcul matriciel par blocs, s'inspirant de la relation (*) ci-dessus, montre que

$$\begin{pmatrix} Q & Q \\ -Q & Q \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & 2\Delta \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Q^{-1} & -Q^{-1} \\ Q^{-1} & Q^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q\Delta Q^{-1} & Q\Delta Q^{-1} \\ Q\Delta Q^{-1} & Q\Delta Q^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} = M,$$

les matrices $\begin{pmatrix} Q & Q \\ -Q & Q \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} Q^{-1} & -Q^{-1} \\ Q^{-1} & Q^{-1} \end{pmatrix}$ étant inverses l'une de l'autre. On a donc $M = RTR^{-1}$ avec $R = \begin{pmatrix} Q & Q \\ -Q & Q \end{pmatrix} \in \text{GL}_{2n}(\mathbb{K})$ et $T = \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & 2\Delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ diagonale : la matrice M est diagonalisable.

Autre solution. Comme A est diagonalisable, il existe une base $(X_1, \dots, X_r, X_{r+1}, \dots, X_n)$ de $\mathbb{K}^n$ constituée de vecteurs propres de A . Dans l'indexation de cette base, on a noté r le rang de la matrice A et on a choisi de noter $X_1, \dots, X_r$ des vecteurs propres de A correspondant à des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ non nulles (non nécessairement distinctes), les $n - r$ vecteurs suivants sont dans le noyau de A , c'est-à-dire sont des vecteurs propres pour la valeur propre 0 (*ceci est bien cohérent puisque, par le théorème du rang, le sous-espace $E_0(A) = \text{Ker}(A)$ est bien de dimension $n - r$*). Mais la matrice M est aussi de rang r (il y a manifestement autant de colonnes indépendantes dans M que dans A), donc $\text{Ker}(M) = E_0(M)$ est de dimension $2n - r$ par le théorème du rang, notons $(Z_{r+1}, \dots, Z_{2n})$ une base de $\text{Ker}(M)$ qui est un sous-espace de $\mathbb{K}^{2n}$. On vérifie par un petit calcul par blocs que si, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on pose $Z_i = \begin{pmatrix} X_i \\ X_i \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2n}$, alors $MZ_i = 2\lambda_i Z_i$, chaque Z_i est donc vecteur propre de M pour une valeur propre $2\lambda_i$ non nulle. Par ailleurs, il est immédiat de vérifier que les vecteurs $Z_1, \dots, Z_r$ de $\mathbb{K}^{2n}$ sont linéairement indépendants. Les SEP étant en somme directe, on déduit enfin que la famille $(Z_1, \dots, Z_r, Z_{r+1}, \dots, Z_{2n})$ est libre et qu'elle est une base de $\mathbb{K}^{2n}$ constituée de vecteurs propres de M , ce qui permet de conclure que M est diagonalisable.

24. Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec B diagonalisable. Montrer que

$$AB^3 = B^3A \implies AB = BA.$$

Écrivons $B = PDP^{-1}$ avec $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. La relation $AB^3 = B^3A$ s'écrit $APD^3P^{-1} = PD^3P^{-1}A$, ou encore $P^{-1}APD^3 = D^3P^{-1}AP$. Posons $P^{-1}AP = R$, de coefficients $r_{i,j}$. La relation obtenue $RD^3 = D^3R$ s'écrit

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad r_{i,j} \lambda_j^3 = r_{i,j} \lambda_i^3,$$

soit encore $r_{i,j}(\lambda_j^3 - \lambda_i^3) = 0$ pour tout couple (i, j) . On a donc, pour tout couple (i, j) ,

$$r_{i,j} = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda_j^3 = \lambda_i^3.$$

Mais la fonction $x \mapsto x^3$ est injective sur $\mathbb{R}$, on en déduit que, pour tout couple (i, j) ,

$$r_{i,j} = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda_j = \lambda_i,$$

soit $r_{i,j}(\lambda_j - \lambda_i) = 0$, soit $r_{i,j} \lambda_j = r_{i,j} \lambda_i$. Donc $RD = DR$. Puis $AB = BA$.

25. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

- a. Démontrer la relation $A^2 = \text{tr}(A) \cdot A$.
- b. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.
- c. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathbb{K}^n = \text{Ker}(A) \oplus \text{Im}(A)$.

- a. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A , $\text{rg}(u) = 1$, donc $\dim(\text{Ker } u) = n - 1$, il existe donc une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ dont les $n - 1$ premiers vecteurs appartiennent à $\text{Ker } u$; dans une telle base, l'endomorphisme u est alors représenté par une

matrice M dont les $n - 1$ premières colonnes sont nulles, soit $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$.

La matrice M est alors semblable à A . On vérifie facilement que

$$M^2 = a_n M = \text{tr}(M) \cdot M = \text{tr}(A) \cdot M$$

(puisque deux matrices semblables ont la même trace), on en déduit $A^2 = \text{tr}(A) \cdot A$.

- b. Le réel 0 est valeur propre de la matrice A (ou de la matrice M , cela revient au même), et le sous-espace propre associé $\text{Ker } A$ est de dimension $n - 1$. Comme A est semblable à M qui est triangulaire supérieure, les valeurs propres de A sont les coefficients diagonaux de M , d'où la discussion :

- si $\text{tr}(A) = 0$, i.e. si $a_n = 0$, alors $\text{Sp}(A) = \{0\}$ et, le seul sous-espace propre étant de dimension $n - 1$, la matrice A n'est pas diagonalisable ;
- si $\text{tr}(A) \neq 0$, i.e. si $a_n \neq 0$, alors $\text{Sp}(A) = \{0, a_n\}$, il y a alors un autre sous-espace propre (qui est nécessairement de dimension 1), donc A est diagonalisable.

En conclusion, une matrice de rang un est diagonalisable **si et seulement si** sa trace est non nulle.

- c. Reprenons les deux cas mentionnés ci-dessus :

- si $\text{tr}(A) = 0$, i.e. si $a_n = 0$, on a $\text{Ker}(u) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$ et $\text{Im } u$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $a_1 e_1 + \dots + a_{n-1} e_{n-1}$ qui appartient donc à $\text{Ker } u$, on a donc $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$, soit $\text{Im}(A) \subset \text{Ker}(A)$, et ces deux sous-espaces ne sont pas supplémentaires.
- si $\text{tr}(A) \neq 0$, i.e. si $a_n \neq 0$, alors $\text{Ker } u$ est toujours l'hyperplan engendré par les vecteurs $e_1, \dots, e_{n-1}$, alors que $\text{Im } u$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $x = a_1 e_1 + \dots + a_{n-1} e_{n-1} + a_n e_n$ n'appartenant pas à $\text{Ker } u$, donc $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont supplémentaires.

Bilan : Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, matrice de rang 1, on a les équivalences

$$A \text{ diagonalisable} \iff \text{tr}(A) \neq 0 \iff \mathbb{K}^n = \text{Ker}(A) \oplus \text{Im}(A).$$

26. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n . Soit u un endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes.

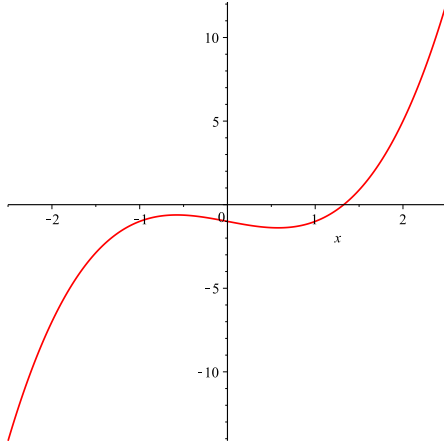
- a. Soit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. Montrer que l'endomorphisme $f = P(u)$ est diagonalisable. A-t-il n valeurs propres distinctes?
- b. Soit v un endomorphisme de E qui commute avec u . Montrer que tout vecteur propre de u est aussi vecteur propre de v . La réciproque est-elle vraie (tout vecteur propre de v est-il vecteur propre de u) ? Montrer que u et v sont codiagonalisables (i.e. diagonalisables dans une même base).

- a. L'endomorphisme u est diagonalisable (propriété de cours, condition suffisante). Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E constituée de vecteurs propres de u , soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées (distinctes par hypothèse), on a donc $u(e_i) = \lambda_i e_i$, $1 \leq i \leq n$. Un calcul classique, fait en cours, montre alors que $f(e_i) = P(u)(e_i) = P(\lambda_i) e_i$. Les vecteurs e_i sont donc aussi vecteurs propres de l'endomorphisme f , mais pour la valeur propre $P(\lambda_i)$. On en déduit que l'endomorphisme $f = P(u)$ est aussi diagonalisable (puisque $\mathcal{B}$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f) mais, une fonction polynomiale n'étant pas en général injective, il n'y a aucune raison pour que ses valeurs propres $P(\lambda_i)$ soient distinctes. *Par exemple, si P est un polynôme constant $P = \alpha$, alors $f = \alpha \text{id}_E$ est une homothétie et a une seule valeur propre, α .*
- b. • On sait que les sous-espaces propres de u sont stables par v . Mais, ces sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(u)$ sont des droites vectorielles. Cela signifie donc qu'elles sont engendrées par un vecteur qui est aussi vecteur propre de v . Reprenons les choses autrement, en réutilisant les notations introduites dans le a.: soit x un vecteur propre de u , alors x appartient à l'un des sous-espaces propres de u , mais ces SEP sont les droites vectorielles $E_{\lambda_i}(u) = \text{Vect}(e_i)$, on a donc $x = \alpha e_i$ avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Comme $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par v , on a $v(x) \in E_{\lambda_i}(u)$, ce qui signifie que $v(x)$ est colinéaire à e_i , donc $v(x) = \beta e_i$ avec $\beta \in \mathbb{K}$. Donc $v(x) = \frac{\beta}{\alpha} x$ est colinéaire à x , ce qui signifie que x est aussi un vecteur propre de v .
 • La réciproque est fausse: si on prend par exemple $v = \text{id}_E$, alors v commute avec u , mais tout vecteur de E (non nul, en toute rigueur) est vecteur propre de v , alors qu'ils ne sont pas tous vecteurs propres de u .
 • On vient de voir que $\mathcal{B}$ est une base de E constituée de vecteurs propres communs à u et à v . Dans cette base, les endomorphismes u et v sont tous deux représentés par des matrices diagonales.

27. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Montrer que $\det(A) > 0$.

On étudie $f : x \mapsto x^3 - x - 1$ sur $\mathbb{R}$, on a $f'(x) = 3x^2 - 1$, donc f est strictement croissante sur $\left] -\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right]$, strictement décroissante sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$, puis strictement croissante sur

$\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty \right[$. Comme $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2-3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} < 0$, on déduit que f s'annule en un seul réel a , appartenant à l'intervalle $\left] \frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty \right[$.



Le polynôme $P = X^3 - X - 1$ est annulateur de la matrice A , et ce polynôme est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$: en effet, il admet une seule racine réelle a , et donc deux autres racines non réelles, qui sont complexes conjuguées (notons-les β et $\bar{\beta}$), et qui sont donc nécessairement distinctes. Donc la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

On a alors $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{a, \beta, \bar{\beta}\}$. De plus, les valeurs propres β et $\bar{\beta}$ ont la même multiplicité (car A est à coefficients réels, donc le polynôme caractéristique est aussi à coefficients réels). En notant r la multiplicité de la valeur propre a , et s celle de β , on a alors

$$\det(A) = a^r \beta^s (\bar{\beta})^s = a^r |\beta|^{2s} \in \mathbb{R}_+^*$$

puisque $a > 0$ et $\beta \neq 0$.

28. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + M^\top = I_n$.

- Montrer que M est inversible si et seulement si $1 \notin \text{Sp}(M)$.
- Montrer que M est diagonalisable.

- On observe que $M^2 = I_n - M^\top = (I_n - M)^\top$. On en déduit les équivalences

$$M \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \iff M^2 \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \iff I_n - M \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \iff 1 \in \text{Sp}(M) .$$

- De la relation $M^2 + M^\top = I_n$, on tire $M^\top = I_n - M^2$ puis, en transposant, $M = I_n - (M^\top)^2$, puis en réinjectant, $(I_n - (M^\top)^2)^2 + M^\top = I_n$, puis en transposant de nouveau et en simplifiant, $M^4 - 2M^2 + M = 0$. Le polynôme $P = X^4 - 2X^2 + X$ est donc annulateur de la matrice M . Or, $P = X(X-1)(X-\alpha)(X-\beta)$ avec $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Le polynôme P est donc scindé à racines simples, la matrice A est donc diagonalisable.

29. Soit E un espace vectoriel de dimension n , soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Étudier les éléments propres et la diagonalisabilité de l'endomorphisme $\varphi : u \mapsto p \circ u - u \circ p$ de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$.

On peut commencer par remarquer que $(\varphi \circ \varphi)(u) = p \circ u - 2p \circ u \circ p + u \circ p$, puis

$$\varphi^3(u) = (\varphi \circ \varphi \circ \varphi)(u) = p \circ u - u \circ p = \varphi(u).$$

On a donc $\varphi^3 = \varphi$ et le polynôme $X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ est annulateur de l'endomorphisme φ . Ce polynôme étant scindé à racines simples, on en déduit que φ est diagonalisable, et que $\text{Sp}(\varphi) \subset \{0, -1, 1\}$.

Pour rechercher les sous-espaces propres, une écriture matricielle pourra aider. On a $E = F \oplus G$ avec $F = \text{Im}(p)$ et $G = \text{Ker}(p)$. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ est une base adaptée à cette décomposition de E , avec $n = \dim(E)$ et $r = \text{rg}(p) = \dim(F)$, alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, posons alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ avec des blocs de même format.

• Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $u \in E_0(\varphi) = \text{Ker}(\varphi)$ si et seulement si $p \circ u = u \circ p$, ce qui se traduit matriciellement par $J_r M = M J_r$, condition qui équivaut à $\begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$. Les endomorphismes u qui conviennent sont ceux qui sont représentés dans la base $\mathcal{B}$ par une matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$, soit encore ceux qui laissent stables les sous-espaces $F = \text{Im}(p)$ et $G = \text{Ker}(p)$. Ainsi, $\dim(E_0(\varphi)) = r^2 + (n-r)^2$.

• De même, $u \in E_1(\varphi)$ si et seulement si $p \circ u - u \circ p = u$, soit $J_r M - M J_r = M$, condition équivalente à $\begin{cases} A = 0 \\ C = 0 \\ D = 0 \end{cases}$. Les endomorphismes u qui conviennent sont ceux qui

sont représentés dans la base $\mathcal{B}$ par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, soit encore ceux qui vérifient $u(\text{Ker } p) \subset \text{Im } p$. Ainsi, $\dim(E_1(\varphi)) = r(n-r)$.

• De même, $u \in E_{-1}(\varphi)$ si et seulement si $p \circ u - u \circ p = -u$, soit $J_r M - M J_r = -M$, condition équivalente à $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ D = 0 \end{cases}$. Les endomorphismes u qui conviennent sont ceux qui

sont représentés dans la base $\mathcal{B}$ par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}$, soit encore ceux qui vérifient $u(\text{Im } p) \subset \text{Ker } p$. Ainsi, $\dim(E_{-1}(\varphi)) = r(n-r)$.

Remarque. On note que $\dim(E_0(\varphi)) + \dim(E_1(\varphi)) + \dim(E_{-1}(\varphi)) = n^2 = \dim(E)$, on retrouve donc que φ est diagonalisable.

-
30. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n , soient F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E . On note p le projecteur sur F parallèlement à G , et s la symétrie par rapport à F

et parallèlement à G . Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on pose $\varphi(f) = p \circ f \circ s$.

- a. Montrer que φ est un endomorphisme diagonalisable de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$. *On recherchera un polynôme annulateur.*
- b. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme φ .

- a. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, on vérifie que $\varphi^2(f) = p \circ (p \circ f \circ s) \circ s = p \circ f$ puisque $p \circ p = p$ et $s \circ s = \text{id}_E$. Puis $\varphi^3(f) = p \circ (p \circ f) \circ s = p \circ f \circ s = \varphi(f)$. On a donc $\varphi^3 = \varphi$, le polynôme $P = X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ est donc annulateur de l'endomorphisme φ . Comme P est scindé à racines simples, on déduit que φ est diagonalisable.
- b. Du a., on déduit que $\text{Sp}(\varphi) \subset \{-1, 0, 1\}$. Pour chacune de ces trois valeurs, recherchons les vecteurs propres éventuels:

- $\varphi(f) = 0 \iff p \circ f \circ s = 0 \iff p \circ f = 0$ puisque s est bijectif (par exemple composer à droite par $s^{-1} = s$). Finalement, $\varphi(f) = 0 \iff \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(p)$. Donc

$$E_0(\varphi) = \text{Ker}(\varphi) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \text{Im}(f) \subset G\}.$$

- De même, $\varphi(f) = f \iff p \circ f \circ s = f \iff p \circ f = f \circ s \dots$ mais je ne sais trop quoi en déduire! Voyons alors les choses matriciellement. Notons $r = \dim(F) = \text{rg}(p)$, et plaçons-nous dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$. On a alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = P = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = S = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$, et posons $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ avec le même format de décomposition. La relation $\varphi(f) = f$ se traduit matriciellement par l'égalité $PMS = M$, soit en effectuant les produits par blocs par $\begin{pmatrix} A & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, soit par les conditions $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$. Les endomorphismes f invariants par φ sont donc ceux qui sont représentés dans la base $\mathcal{B}$ par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$. On voit alors que ce sont ceux qui vérifient $G \subset \text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f) \subset F$. Finalement,

$$E_1(\varphi) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid G \subset \text{Ker}(f) \text{ et } \text{Im}(f) \subset F\}.$$

- Enfin, $\varphi(f) = -f \iff p \circ f \circ s = -f$. En travaillant matriciellement dans une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$ comme ci-dessus, on voit que les endomorphismes recherchés sont ceux dont la matrice est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $B \in \mathcal{M}_{r, n-r}(\mathbb{K})$. On conclut que

$$E_{-1}(\varphi) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \text{Im}(f) \subset F \subset \text{Ker}(f)\}.$$

Remarque. On aurait pu traiter matriciellement le cas de la valeur propre 0 et conclure que $E_0(\varphi)$ est constitué des endomorphismes f dont la matrice en base adaptée est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ avec $C \in \mathcal{M}_{n-r, r}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$. De cette vision matricielle, on déduit facilement les dimensions des sous-espaces propres de φ (nombre de “degrés de liberté” pour construire une matrice de la forme voulue), à savoir

$$\dim(E_0(\varphi)) = n(n-r) \quad ; \quad \dim(E_1(\varphi)) = r^2 \quad ; \quad \dim(E_{-1}(\varphi)) = r(n-r) ,$$

et on peut vérifier que la somme vaut $n^2 = \dim(\mathcal{L}(E))$, on retrouve donc que φ est diagonalisable.

-
- 31.** Soient f et g deux endomorphismes diagonalisables d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que f et g commutent si et seulement s'ils sont simultanément diagonalisables (i.e. s'il existe une base de E constituée de vecteurs propres communs à f et g).

Déjà, s'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle f et g sont tous deux représentés par des matrices diagonales D et D' , comme $DD' = D'D$, on déduit immédiatement que $f \circ g = g \circ f$.

Réciproquement, supposons que f et g commutent. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres

distinctes de f . Comme f est diagonalisable, on a $E = \bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}(f)$. Pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$,

le sous-espace propre $E_{\lambda_i}(f)$ de f est stable par g , notons g_i l'endomorphisme induit par g sur $E_{\lambda_i}(f)$. Comme g est diagonalisable, un théorème du cours affirme que g_i est aussi diagonalisable, il existe donc une base $\mathcal{B}_i$ de $E_{\lambda_i}(f)$ constituée de vecteurs propres de g_i donc de g (puisque g_i est une restriction de g). Les vecteurs de cette base $\mathcal{B}_i$ sont aussi vecteurs propres de f puisqu'ils sont dans $E_{\lambda_i}(f)$. Enfin, la famille de vecteurs de E obtenue par concaténation des $\mathcal{B}_i$, $1 \leq i \leq k$, est une base de E , et elle est constituée de vecteurs propres communs à f et à g .

-
- 32.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\text{rg}(A) = 2$, $\text{tr}(A) = 0$ et $A^n \neq 0$. Montrer que la matrice A est diagonalisable.

Comme $\text{rg}(A) = 2$, on a $0 \in \text{Sp}(A)$ et $\dim(E_0(A)) = n - 2$. Le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{C}$, et 0 est valeur propre de multiplicité au moins $n - 2$, on a donc $\chi_A = X^{n-2}(X - \alpha)(X - \beta)$ avec α et β des nombres complexes (éventuellement nuls). Puis $\text{tr}(A) = 0 = \alpha + \beta$. On ne peut alors avoir $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ car cela entraînerait $\chi_A = X^n$, donc $A^n = 0$ par le théorème de Cayley-Hamilton, cela contredit donc une des hypothèses. Les nombres α et β sont donc non nuls et opposés, donc distincts, et la matrice A admet donc deux valeurs propres non nulles distinctes. Pour chacune de ces valeurs propres, il y a alors un sous-espace propre de dimension au moins 1 (et au plus 1 car la somme des dimensions des SEP ne peut dépasser n). Finalement, $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim E_{\lambda}(A) = (n - 2) + 1 + 1 = n$, donc

A est diagonalisable.

-
- 33.** Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , soit u un endomorphisme de E , supposé diagonalisable. À quelle condition existe-t-il un vecteur x de E tel que la famille $\mathcal{F} = (x, u(x), u^2(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E ? On écrira le déterminant de la famille $\mathcal{F}$ relativement à une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de u .

Puisque u est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs propres, notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres (*a priori non nécessairement distinctes*) associées à ces

vecteurs. Soit x un vecteur de E , on le décompose dans la base $\mathcal{B}$: $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. On a alors $u(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i$ et, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $u^k(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k x_i e_i$. Le déterminant, relativement à la base $\mathcal{B}$, de la famille de vecteurs $\mathcal{F} = (x, u(x), u^2(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{vmatrix} x_1 & \lambda_1 x_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} x_1 \\ x_2 & \lambda_2 x_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & \lambda_n x_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} x_n \end{vmatrix} = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

On reconnaît un déterminant de Vandermonde :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \cdot V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \left[\prod_{1 \leq j < k \leq n} (\lambda_k - \lambda_j) \right].$$

On cherche une condition nécessaire et suffisante sur l'endomorphisme u pour qu'il existe un vecteur x tel que ce déterminant soit non nul. Il est clairement nécessaire que le déterminant de Vandermonde $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ soit non nul, et cette condition est suffisante aussi : en effet,

si elle est vérifiée, le vecteur $x = \sum_{i=1}^n e_i$ (*celui dont toutes les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont égales à 1*) fera l'affaire.

En conclusion, la condition recherchée est que l'endomorphisme u ait n valeurs propres distinctes.

34*. Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension n . On note $\mathcal{C}_f$ l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f .

- Montrer que $\mathcal{C}_f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
- Montrer qu'un endomorphisme g appartient à $\mathcal{C}_f$ si et seulement si chaque sous-espace propre de f est stable par g .
- En déduire que

$$\dim(\mathcal{C}_f) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} m_{\lambda}^2,$$

où m_{λ} est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ .

- On suppose que les valeurs propres de f sont simples. Montrer que $(\text{id}_E, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}_f$.

- Immédiat.
- Le sens direct est un résultat du cours: si g commute avec f , alors il laisse stables les sous-espaces propres de f .

Réciproquement, notons $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de f , on a alors

$E = \bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}(f)$ puisque f est diagonalisable. Soit g un endomorphisme laissant stable

chaque sous-espace propre $E_{\lambda_i}(f)$, $1 \leq i \leq k$. Si x est un vecteur de E , on peut le décomposer (de façon unique) en $x = x_1 + \dots + x_k$ avec $x_i \in E_{\lambda_i}(f)$ pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$. On a alors

$$f(x) = \sum_{i=1}^k f(x_i) = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i, \text{ puis } (g \circ f)(x) = g\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i g(x_i). \text{ D'un autre côté,}$$

$$g(x) = \sum_{i=1}^k g(x_i) \text{ et, par hypothèse, on a } g(x_i) \in E_{\lambda_i}(f) \text{ pour tout } i, \text{ donc}$$

$$(f \circ g)(x) = \sum_{i=1}^k f(g(x_i)) = \sum_{i=1}^k \lambda_i g(x_i) = (g \circ f)(x),$$

on a prouvé que $g \in \mathcal{C}_f$.

- c. Notons toujours $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de f , et $d_1, \dots, d_k$ leurs multiplicités (qui sont aussi les dimensions des sous-espaces propres puisque f est diagonalisable). Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E adaptée à la décomposition $E = E_{\lambda_1}(f) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k}(f)$, i.e. les d_1 premiers vecteurs sont dans $E_{\lambda_1}(f)$, $\dots$, les d_k derniers sont dans $E_{\lambda_k}(f)$. Alors un endomorphisme g laisse stables les $E_{\lambda_i}(f)$ si et seulement si sa matrice relativement à la base

$\mathcal{B}$ est diagonale par blocs, de la forme $\begin{pmatrix} D_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & D_k \end{pmatrix}$ avec $D_i \in \mathcal{M}_{d_i}(\mathbb{K})$ pour tout i .

L'ensemble des matrices de cette forme est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension

$$\sum_{i=1}^k d_i^2 \text{ (c'est le nombre de coefficients à choisir pour construire une telle matrice). Comme}$$

l'application $g \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ est un isomorphisme entre les espaces vectoriels $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

donc conserve les dimensions, on déduit que $\dim(\mathcal{C}_f) = \sum_{i=1}^k d_i^2$.

- d. Dans ce cas, $\dim(\mathcal{C}_f) = n$, et les endomorphismes $\text{id}_E, f, \dots, f^{n-1}$ appartiennent effectivement à $\mathcal{C}_f$. Pour montrer qu'ils constituent une base de $\mathcal{C}_f$, il suffit de montrer que la famille $(\text{id}_E, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre. Soient donc $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ tels que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k = 0$.

Le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$ est alors annulateur de f , il doit donc posséder comme racines les n valeurs propres distinctes de f . Comme il est de degré au plus $n-1$, c'est le polynôme nul, ce qui signifie la nullité des coefficients α_i .

35. Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $n \geq 2$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$\varphi(P)(X) = (X - a) (P'(X) - P'(a)) - 2 (P(X) - P(a)).$$

- a. Montrer que φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.
b. Déterminer ses valeurs propres. Est-il diagonalisable ? *On pourra utiliser le fait que la famille $(1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.*

La linéarité de φ est immédiate. La famille $\mathcal{B} = (1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$ est une base de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$. On constate que $\varphi(1) = 0$, $\varphi(X - a) = -2(X - a)$ et, pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on a

$$\varphi((X - a)^k) = (X - a) \cdot k(X - a)^{k-1} - 2(X - a)^k = (k - 2)(X - a)^k.$$

Comme les images par φ des polynômes constituant la base $\mathcal{B}$ appartiennent à E , on en déduit que φ est bien un endomorphisme de E (question a.). Comme on voit d'autre part que cette base $\mathcal{B}$ est constituée de vecteurs propres de φ , on déduit que φ est diagonalisable, son spectre étant $\text{Sp}(\varphi) = \{-2\} \cup \llbracket 0, n - 2 \rrbracket$, la valeur propre 0 étant double et les autres simples (question b.).

36. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent, soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

a. Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \quad P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)B \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}.$$

b. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que M soit diagonalisable.

a. On observe que $M^0 = I_{2n} = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$ puis, par une récurrence immédiate, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0_n & A^k \end{pmatrix}.$$

Si $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, par combinaisons linéaires, on obtient

$$P(M) = \sum_{k=0}^d a_k M^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^d a_k A^k & \sum_{k=1}^d k a_k A^{k-1} B \\ 0_n & \sum_{k=0}^d a_k A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)B \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}.$$

b. Si M est diagonalisable, alors il existe un polynôme P scindé à racines simples tel que $P(M) = 0_{2n}$, ce qui entraîne $P(A) = 0_n$ et $P'(A)B = 0_n$. On en déduit que A est diagonalisable, A est donc semblable à une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où les λ_i sont racines de P (puisque P est annulateur de A). Un calcul classique montre alors que la matrice $P'(A)$ est semblable à $P'(D) = \text{diag}(P'(\lambda_1), \dots, P'(\lambda_n))$ et, comme les racines de P sont simples, aucun des λ_i n'est racine de P' . Donc $P'(D)$ est une matrice inversible (car diagonale avec des coefficients diagonaux tous non nuls). Donc $P'(A)$ est aussi une matrice inversible puisqu'elle est semblable à $P'(D)$. La relation $P'(A)B = 0_n$ entraîne alors que $B = 0_n$.

On a donc montré que, **si** M est diagonalisable, **alors** A est diagonalisable et B est nulle.

La réciproque est facile: si A est diagonalisable i.e. $A = PDP^{-1}$, alors $M = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix}$ l'est aussi puisqu'en posant $Q = \begin{pmatrix} P & 0_n \\ 0_n & P \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} D & 0_n \\ 0_n & D \end{pmatrix}$, on a $M = Q\Delta Q^{-1}$.

37. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

a. Montrer que tout endomorphisme v de E vérifiant $v^2 = u$ est diagonalisable.

b*. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme v de E tel que $v^2 = u$ et $\text{Sp}(v) \subset \mathbb{R}_+^*$.

a. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres (distinctes) de u , alors $P = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)$ est un polynôme annulateur de u . Donc $0 = P(u) = P(v^2) = Q(v)$, avec

$$Q(X) = P(X^2) = \prod_{k=1}^p [(X - \sqrt{\lambda_k})(X + \sqrt{\lambda_k})].$$

Ce polynôme Q étant scindé à racines simples, v est diagonalisable.

b. Notons toujours $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u , on a alors $E = \bigoplus_{k=1}^p E_{\lambda_k}(u)$.

Si $v \in \mathcal{L}(E)$ satisfait les conditions requises, soit x un vecteur appartenant à l'un des sous-espaces propres $E_{\lambda_k}(u)$. On a alors $v^2(x) = u(x) = \lambda_k x$, soit $(v^2 - \lambda_k \text{id}_E)(x) = 0_E$, soit encore $(v + \sqrt{\lambda_k} \text{id}_E) \circ (v - \sqrt{\lambda_k} \text{id}_E)(x) = 0_E$. Mais $-\sqrt{\lambda_k} \notin \text{Sp}(v)$ donc l'endomorphisme $v + \sqrt{\lambda_k} \text{id}_E$ est injectif. On en déduit que $v(x) = \sqrt{\lambda_k} x$. Un endomorphisme de E étant entièrement déterminé par ses restrictions aux $E_{\lambda_k}(u)$, cela prouve l'unicité de v .

Réciproquement, l'unique endomorphisme v de E tel que

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad \forall x \in E_{\lambda_k}(u) \quad v(x) = \sqrt{\lambda_k} x$$

convient puisque $\text{Sp}(v) = \{\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_p}\} \subset \mathbb{R}_+^*$, et v^2 coïncide avec u sur chaque sous-espace $E_{\lambda_k}(u)$ donc $v^2 = u$.

Trigonalisation.

38. Trigonaliser $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

En commençant par exemple par l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_3$, on obtient $\chi_A = (X - 1)^3$. La matrice A admet donc pour seule valeur propre le nombre 1, de multiplicité 3. La matrice

$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 2, donc le sous-espace propre $E_1(A)$ est de dimension 1,

on voit facilement que c'est la droite engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Montrons que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En nommant u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A , on cherche trois vecteurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ de $\mathbb{R}^3$, linéairement indépendants, tels que $\begin{cases} \textbf{(1)} : u(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 \\ \textbf{(2)} : u(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \textbf{(3)} : u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \end{cases}$. Choisissons déjà $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ainsi

l'équation **(1)** est satisfaite. On cherche ensuite $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $(A - I_3) \varepsilon_2 = \varepsilon_1$,

soit $\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ -x + z = 0 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$, le vecteur $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient. On cherche enfin $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ tel

que $(A - I_3)\varepsilon_3 = \varepsilon_2$, soit $\begin{cases} -u + v + w = 1 \\ -u + w = 0 \\ -u + v + w = 1 \end{cases}$, le vecteur $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient. On vérifie

que la famille $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, alors on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = T$, autrement dit $A = PTP^{-1}$ avec $P = P_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

39. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On suppose que $\chi_A = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$. Déterminer $\chi_{P(A)}$.

Comme $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la matrice A est trigonalisable: on a $A = QTQ^{-1}$, avec $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & (\times) \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

et $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$. Il est facile de vérifier que, pour tout k entier naturel, la matrice T^k est triangulaire supérieure avec $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ pour coefficients diagonaux. On en déduit facilement que, si P est un polynôme, alors la matrice $P(T)$ est triangulaire supérieure avec $P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)$ pour coefficients diagonaux. Comme on a $P(A) = Q \cdot P(T) \cdot Q^{-1}$ (*calcul classique*), on déduit que

$$\chi_{P(A)} = \chi_{P(T)} = \prod_{k=1}^n (X - P(\lambda_k)) .$$

40*. Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$.

- Montrer que A et B ont un vecteur propre commun.
- Montrer que A et B sont simultanément trigonalisables.

41*. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence

$$A \text{ est nilpotente} \iff \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \text{tr}(A^k) = 0.$$

Le sens direct est facile: si A est nilpotente, alors pour k entier naturel non nul, A^k l'est aussi donc $\text{Sp}(A^k) = \{0\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: en effet, comme A admet un polynôme annulateur de la forme X^p , sa seule valeur propre possible est 0, et 0 est effectivement valeur propre puisque A est non-inversible. On a donc $\text{tr}(A^k) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A^k)} m_\lambda \lambda = 0$.

Réciproquement, supposons $\text{tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Supposons par l'absurde que A admette des valeurs propres non nulles, et notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres **non nulles** distinctes, notons $m_1, \dots, m_p$ leurs multiplicités respectives. On a alors $p \leq n$ et les m_i sont non nuls ($1 \leq i \leq p$). En trigonalisant, on voit que pour tout k , la matrice A^k admet pour valeurs propres non nulles $\lambda_1^k, \dots, \lambda_p^k$ avec les mêmes multiplicités $m_1, \dots, m_p$ (en toute rigueur, ce n'est pas tout à fait vrai car si les λ_i sont distincts, les λ_i^k peuvent ne plus l'être, mais cela ne change rien pour l'expression de la trace...). On a donc $\text{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^p \lambda_i^k m_i = 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Conservons seulement les p premières équations, i.e. pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, elles constituent un système linéaire homogène **(S)** de p équations à p inconnues $m_1, \dots, m_p$ dont le déterminant est

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_p \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_p^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^p & \lambda_2^p & \cdots & \lambda_p^p \end{vmatrix} = \left(\prod_{i=1}^p \lambda_i \right) V_p(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$$

(déterminant de Vandermonde). Les λ_i étant deux à deux distincts et non nuls, ce déterminant est non nul, la seule solution du système **(S)** est alors $m_1 = \dots = m_p = 0$, ce qui est absurde. On conclut de tout cela que la seule valeur propre de A est 0, donc comme A est trigonalisable, elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure T dont les coefficients diagonaux sont nuls et, comme $T^n = 0$, on a aussi $A^n = 0$ et A est nilpotente. *On peut aussi conclure en remarquant que, si $\text{Sp}(A) = \{0\}$, on a nécessairement $\chi_A = X^n$ et utiliser Cayley-Hamilton.*

Théorème de Cayley-Hamilton.

42. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on suppose que les matrices M et $2M$ sont semblables. Montrer que M est nilpotente. *On montrera que $\text{Sp}(M) = \{0\}$.*

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M , alors λ est aussi valeur propre de $2M$, donc $\frac{\lambda}{2}$ est valeur propre de M . En itérant ce raisonnement, on obtient que, pour tout n entier naturel,

le scalaire $\frac{\lambda}{2^n}$ est valeur propre de M . Si λ est non nul, on déduit que M admet une infinité de valeurs propres, ce qui est impossible. On a donc $\text{Sp}(M) \subset \{0\}$ et, comme $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le spectre de M est non vide, donc $\text{Sp}(M) = \{0\}$. Comme le polynôme caractéristique χ_M est scindé, unitaire de degré n , et que sa seule racine est 0, on a donc $\chi_M = X^n$. Enfin, le théorème de Cayley-Hamilton donne $\chi_M(M) = M^n = 0_n$, donc M est nilpotente.

43*. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E de dimension finie. Montrer qu'il existe une droite ou un plan de E stable par f . Est-ce encore vrai en dimension infinie ?

• Supposons E de dimension finie.

Soit χ_f le polynôme caractéristique de f , alors $\chi_f \in \mathbb{R}[X]$.

- si χ_f admet une racine réelle λ , alors λ est valeur propre de f , et si on considère un vecteur propre x associé, la droite vectorielle $\text{Vect}(x)$ est une droite stable par f .

- sinon, χ_f se décompose dans $\mathbb{R}[X]$ comme produit de facteurs irréductibles $P_1, \dots, P_k$ qui sont tous des polynômes de degré deux sans racine réelle (que l'on peut supposer unitaires). Le théorème de Cayley-Hamilton nous indique que $\chi_f(f)$ est l'endomorphisme nul, soit $P_1(f) \circ \dots \circ P_k(f) = 0$. L'un au moins des endomorphismes $P_i(f)$, $1 \leq i \leq k$, est non injectif, sinon leur composée $\chi_f(f)$ serait injective, ce qui n'est pas. Posons $P_i = X^2 + \alpha X + \beta$, et considérons un vecteur x non nul appartenant à $\text{Ker}(P_i(f))$, on a alors la relation $P_i(f)(x) = f^2(x) + \alpha f(x) + \beta x = 0_E$, donc le plan $\Pi = \text{Vect}(x, f(x))$ est stable par f puisque $f(x) \in \Pi$ et $f(f(x)) = f^2(x) = -\alpha f(x) - \beta x \in \Pi$. *Il s'agit bien d'un plan puisque les vecteurs x et $f(x)$ ne sont pas colinéaires, sinon x serait vecteur propre de f , impossible puisque f n'a pas de valeur propre.*

• Le résultat n'est pas vrai en dimension infinie. Par exemple, soit l'endomorphisme f de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ défini par $f(P) = XP$. Si un sous-espace vectoriel F de E , non réduit à $\{0\}$, est stable par f , si on considère $P \in F \setminus \{0\}$, alors les polynômes $X^k P = f^k(P)$ ($k \in \mathbb{N}$), qui sont tous de degré distincts, appartiennent à F , donc F est de dimension infinie. Il n'y a donc pas de droite ni de plan stable par f .

44. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, non nulle, telle que $AM = MB$. Montrer que A et B ont une valeur propre commune (*on pourra montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(A)M = MP(B)$*). Étudier la réciproque.

a. De $AM = MB$, on déduit par une récurrence immédiate que $A^k M = M B^k$ pour tout entier naturel k , puis en faisant des combinaisons linéaires, on obtient que $P(A)M = MP(B)$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$. Avec $P = \chi_A$ en particulier, cela donne $M \chi_A(B) = 0$ puisque l'on sait que $\chi_A(A) = 0$ (Cayley-Hamilton). Comme M n'est pas la matrice nulle, on en déduit que la matrice $\chi_A(B)$ n'est pas inversible (sinon, en multipliant à droite par son inverse, on obtiendrait $M = 0$). Notons alors $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres (non nécessairement distinctes) de A , on a alors $\chi_A = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$ puisque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ donc χ_A est

scindé. Donc

$$0 = \det(\chi_A(B)) = \det\left(\prod_{k=1}^n (B - \lambda_k I_n)\right) = \prod_{k=1}^n \det(B - \lambda_k I_n) = (-1)^{n^2} \prod_{k=1}^n \chi_B(\lambda_k).$$

L'un des facteurs est donc nul, donc une au moins des valeurs propres λ_k de la matrice A est racine de χ_B donc est aussi valeur propre de B . Donc A et B ont une valeur propre commune.

b. Réciproque

Supposons que A et B admettent une valeur propre commune λ , alors λ est aussi valeur propre de $B^\top$ (une matrice et sa transposée ont le même spectre). Soient $X \in \mathbb{C}^n$ et $Y \in \mathbb{C}^n$ des vecteurs propres associés pour A et $B^\top$ respectivement. On a les relations $X \neq 0, Y \neq 0, AX = \lambda X, B^\top Y = \lambda Y$. En transposant cette dernière, on obtient $Y^\top B = \lambda Y^\top$. Posons enfin $M = XY^\top$. Alors $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, M est non nulle (elle est de rang 1), et

$$AM = A(XY^\top) = (AX)Y^\top = \lambda XY^\top = \lambda M = X(\lambda Y^\top) = X(Y^\top B) = (XY^\top)B = MB.$$

La condition est donc nécessaire et suffisante.

45. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -b & a \\ b & 0 & -c \\ -a & c & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.

- a. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
- b. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?
- c. Soit $B = A + \lambda I_3$ avec λ réel non nul. Montrer que B est inversible et que l'on peut écrire $B^{-1} = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3$, où α, β, γ sont des réels (dépendant de λ).

- a. En développant tout bêtement par la règle de Sarrus, on obtient

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & b & -a \\ -b & X & c \\ a & -c & X \end{vmatrix} = X(X^2 + (a^2 + b^2 + c^2)).$$

Si $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, alors χ_A n'est pas diagonalisable (ni même trigonalisable) sur $\mathbb{R}$ puisque son polynôme caractéristique n'est pas scindé.

Si $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, alors A est la matrice nulle, et est évidemment diagonalisable.

- b. Pour $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, la matrice nulle est évidemment diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Si $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, alors A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ car elle a trois valeurs propres complexes distinctes: $0, i\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ et $-i\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

- c. Le réel non nul $-\lambda$ n'est pas valeur propre de A , donc $B = A + \lambda I_3$ est inversible. Le théorème de Cayley-Hamilton nous apprend que $\chi_B(B) = 0_3$. Or, χ_B est un polynôme de degré 3 de la forme $\chi_B = X^3 + b_2 X^2 + b_1 X + b_0$ avec $b_0 = -\det(B) \neq 0$. Donc

$$B^3 + b_2 B^2 + b_1 B + b_0 I_3 = 0_3, \quad \text{soit} \quad B(B^2 + b_2 B + b_1 I_3) = -b_0 I_3,$$

donc

$$B^{-1} = \frac{-1}{b_0} (B^2 + b_2 B + b_1 I_3) = -\frac{1}{b_0} ((A + \lambda I_3)^2 + b_2(A + \lambda I_3) + b_1 I_3)$$

est bien de la forme voulue, après développement.

46. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice non scalaire, admettant une unique valeur propre a . Montrer que A est semblable à $M = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de A est unitaire de degré 2 et admet a pour seule racine, donc $\chi_A = (X - a)^2$. Du théorème de Cayley-Hamilton, on déduit que $(A - aI_2)^2 = 0_2$, soit $\text{Im}(A - aI_2) \subset \text{Ker}(A - aI_2)$. Comme $A \neq aI_2$ et que $a \in \text{Sp}(A)$, on déduit que $\dim(\text{Ker}(A - aI_2)) = \dim(E_a(A)) = 1$. Le théorème du rang affirme par ailleurs que $\dim(\text{Im}(A - aI_2)) + \dim(\text{Ker}(A - aI_2)) = 2$. Finalement,

$$\dim(\text{Im}(A - aI_2)) = \dim(\text{Ker}(A - aI_2)) = 1.$$

L'inclusion obtenue plus haut montre finalement que $\text{Ker}(A - aI_2) = \text{Im}(A - aI_2)$.

Soit $U \in \mathbb{C}^3$ un vecteur non nul de $E_a(A) = \text{Ker}(A - aI_2)$, on a donc $AU = aU$. Comme $U \in \text{Im}(A - aI_2)$ d'après le raisonnement ci-dessus, il existe un vecteur V tel que $(A - aI_2)V = U$, i.e. tel que $AV = U + aV$. Le vecteur V n'est pas colinéaire à U puisqu'il, n'appartient pas à la droite vectorielle $\text{Ker}(A - aI_2)$, donc $\mathcal{B} = (U, V)$ est une base de $\mathbb{C}^2$, et les relations $AU = aU$ et $AV = U + aV$ montrent que, dans cette base $\mathcal{B}$, l'endomorphisme u_A de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé à la matrice A est représenté par la matrice $M = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Ces deux matrices sont donc semblables.

Exercices avec Python.

47. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -7 & -3 & 0 \\ 54 & 8 & -36 \\ 3 & -3 & -10 \end{pmatrix}$. Soit le vecteur $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Pour tout entier naturel n , on note X_n le n -ième itéré de X_0 par A (ou par l'endomorphisme canoniquement associé), c'est-à-dire $X_n = A^n X_0$. Faire afficher les X_n pour n de 0 à 15 (*valeurs approchées*). Que remarque-t-on ?
- Pour travailler avec des valeurs numériques "raisonnables", on norme les X_n à chaque étape, autrement dit on construit une suite de vecteurs (Y_n) , avec $Y_0 = \frac{X_0}{\|X_0\|}$, puis $Y_{n+1} = \frac{AY_n}{\|AY_n\|}$. Pour n de 1 à 15, afficher le vecteur Y_n ainsi que le produit scalaire $(AY_n|Y_n)$. Conclusion ?
- Tester avec d'autres vecteurs "initiaux" X_0 construits aléatoirement.
- En prenant $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, qu'obtient-on avec 20 itérations ? avec 40 itérations ?
- Utiliser les fonctions du module `numpy.linalg` pour diagonaliser la matrice A .
- Comment interpréter les résultats des calculs précédents ?

Les notations $(\cdot|\cdot)$ et $\|\cdot\|$ représentent respectivement le produit scalaire canonique et la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$.