

Rayon de convergence.

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$, avec

a. $a_n = \frac{n!}{n^n}$; b. $a_n = n^{(-1)^n}$; c. $a_n = \binom{2n}{n}$; d. $a_n = \lfloor 10^n \pi \rfloor - 10 \times \lfloor 10^{n-1} \pi \rfloor$

(dans le d., le coefficient a_n est la n -ème décimale du nombre π).

a. On a $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e}$, donc $R = e$ par la règle de d'Alembert.

b. On a $a_n = n$ si n est pair, $a_n = \frac{1}{n}$ si n est impair. Dans les deux cas, $\frac{1}{n} \leq a_n \leq n$ pour tout $n \geq 1$. Les séries entières $\sum nx^n$ et $\sum \frac{x^n}{n}$ ayant toutes deux pour rayon de convergence 1 (par application immédiate de la règle de d'Alembert), on déduit, par comparaison, que $R = 1$.

c. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1}$ après quelques simplifications. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4$, puis $R = \frac{1}{4}$.

d. La suite (a_n) est bornée puisque $0 \leq a_n \leq 9$, donc $R \geq 1$. La série $\sum a_n$ diverge grossièrement car il est bien connu que le nombre π n'est pas décimal (il est même irrationnel), donc les a_n ne peuvent être tous nuls à partir d'un certain rang, on trouve donc dans la suite (a_n) une infinité de termes supérieurs ou égaux à 1, cette suite ne peut donc tendre vers zéro. On en déduit que $R \leq 1$. Finalement $R = 1$.

2. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$, avec $l \in \overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty]$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$?

Montrons que le rayon de convergence est $R = \frac{1}{l}$ avec les conventions habituelles ($\frac{1}{l} = 0$ si $l = +\infty$, et $\frac{1}{l} = +\infty$ si $l = 0$). Posons $J = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$.

▷ soit $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $r < \frac{1}{l}$, alors $rl < 1$ et, comme

$$(*) : \quad \sqrt[n]{|a_n| r^n} = r \sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} rl,$$

on a $\sqrt[n]{|a_n| r^n} < 1$ à partir d'un certain rang, donc aussi $|a_n| r^n < 1$ APCR, et la suite $(|a_n| r^n)$ est bornée, donc $r \in J$.

On a prouvé que $\left[0, \frac{1}{l}\right] \subset J$, donc $R \geq \frac{1}{l}$.

▷ Soit $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $r > \frac{1}{l}$, alors $rl > 1$ et, de $(*)$, on déduit que $|a_n| r^n > 1$ à partir d'un certain rang, donc la série $\sum a_n r^n$ est grossièrement divergente, ce qui prouve que $r \geq R$.

On a ainsi montré que $\left] \frac{1}{l}, +\infty \right[\subset [R, +\infty[$, ce qui entraîne $R \leq \frac{1}{l}$.

Bilan. $R = \frac{1}{l}$.

3. Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in [0, +\infty]$.

- a. Soit P un polynôme non nul. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} P(n) a_n z^n$.
- b. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n z^{2n}$ et $\sum_{n \geq 0} a_n^2 z^n$.

- a. Allons-y par petites touches : d'abord, si deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont telles que $a_n \sim b_n$, alors elles ont le même rayon de convergence : en effet, si $a_n \sim b_n$, alors il existe des constantes C_1 et C_2 strictement positives telles que $C_1 |a_n| \leq |b_n| \leq C_2 |a_n|$ à partir d'un certain rang. De $|b_n| \geq C_1 |a_n|$, on déduit que $R_B \leq R_A$, et de $|b_n| \leq C_2 |a_n|$, on déduit $R_B \geq R_A$, donc $R_B = R_A$.

Si P est un polynôme constant non nul, la série entière $\sum P(n) a_n z^n$ a aussi pour rayon de convergence R (*évident*). Si P est un polynôme de degré $d > 0$, on a $P(n) a_n \sim C n^d a_n$, où C est une constante non nulle (le coefficient dominant du polynôme P), il suffit donc de montrer que la série entière $\sum_{n \geq 0} n^d a_n z^n$ a le même rayon de convergence que $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

Or on sait que la série $\sum n a_n z^n$ a le même rayon de convergence R que la série $\sum a_n z^n$ puisque c'est (presque) sa série dérivée, il suffit donc d'itérer d fois ce raisonnement pour conclure.

- b. On sait que $R = \sup(J)$, avec $J = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$. Le rayon de convergence R' de $\sum a_n z^{2n}$ est $R' = \sup(J')$, avec $J' = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } (a_n r^{2n}) \text{ est bornée}\}$. Or, $r \in J' \iff r^2 \in J$, donc l'intervalle J' est constitué exactement des racines carrées des éléments de J , puis $R' = \sqrt{R}$.

De même, le rayon de convergence R'' de $\sum a_n^2 z^n$ est $R'' = \sup(J'')$, avec

$$J'' = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } (a_n^2 r^n) \text{ est bornée}\} = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } (a_n (\sqrt{r})^n) \text{ est bornée}\}.$$

En effet, une suite est bornée si et seulement si la suite des carrés est bornée. Donc $r \in J'' \iff \sqrt{r} \in J$, l'intervalle J'' est constitué exactement des carrés des éléments de J , d'où $R'' = R^2$.

Attention! Il aurait été faux de commencer la démonstration par : "la série entière $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence R , donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{R}$ "!!! Je rappelle qu'il n'y a pas de réciproque à la règle de d'Alembert!

4. Soit une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence non nul. Montrer que la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \frac{a_n z^n}{n!} \text{ a un rayon de convergence infini.}$$

Puisque la première série entière a un rayon de convergence non nul, il existe un $r > 0$ tel que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée : $|a_n| r^n \leq M$. On en déduit une majoration des coefficients par une suite géométrique : $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$, avec $M > 0$ et $r > 0$. Il en résulte la majoration $\left| \frac{a_n}{n!} \right| \leq \frac{M}{n! r^n}$ et, comme la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n! r^n}$ a un rayon de convergence infini (c'est une série exponentielle), par comparaison, la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n z^n}{n!}$ a aussi un rayon de convergence infini.