CORRIGÉ du DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 4
PSI2 2025-2026

PARTIE A. Recherche de sous-espaces stables. Étude d'exemples.

1.a. On a $\chi_u = \chi_A = X^2$, donc $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ (valeur propre double). La matrice A est de rang 1, donc $E_0(u) = \mathrm{Ker}(u)$ est de dimension 1, puis $E_0(u) = \mathrm{Vect}(e_1)$. L'image étant engendrée par les colonnes de la matrice, $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(e_1)$.

b. On a $\chi_v = \chi_B = X^2 + 1$, donc $\mathrm{Sp}(v) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \emptyset$. *La réponse eût été tout autre si v avait été défini comme endomorphisme de $\mathbb{C}^2$.* Puis $\mathrm{Im}(v) = \mathbb{R}^2$ puisque la matrice B est de rang 2.

2.a. On notera (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. En regardant la deuxième colonne de M, on voit immédiatement que $f(e_2) = e_2$, donc 1 est valeur propre de f, et e_2 est un vecteur propre associé. La somme des coefficients de chaque ligne de M vaut 2, donc 2 est valeur propre de f, et $e_1 + e_2 + e_3$ est un vecteur propre associé. Enfin, deux lignes de M sont égales, donc la matrice M n'est pas inversible, i.e. 0 est valeur propre de f, on recherche alors une relation de dépendance linéaire entre les colonnes, ce qui nous donnera un vecteur non nul du noyau. On trouve facilement la relation $C_1 + 3C_2 - C_3 = 0$, donc le vecteur $e_1 + 3e_2 - e_3$ appartient à $\mathrm{Ker}(f)$.

Finalement, l'endomorphisme f admet trois valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable, et ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles. Plus précisément, $\mathrm{Sp}(f) = \{0, 1, 2\}$, $E_0(f) = \mathrm{Vect}(e_1 + 3e_2 - e_3)$, $E_1(f) = \mathrm{Vect}(e_2)$, $E_2(f) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$.

Ou encore: $M = PDP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b. Calculons, en commençant par $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$, puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\chi_g(x) = \chi_N(x) = \begin{vmatrix} x-2 & -1 & 0 \\ 1 & x-3 & -1 \\ -1 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-3 & -1 & 0 \\ x-3 & x-3 & -1 \\ x-3 & 0 & x-2 \end{vmatrix} = (x-3) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & x-2 & -1 \\ 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix},$$

un développement par rapport à la 1ère colonne donne enfin $\chi_g(x) = (x-3)\left[(x-2)^2 + 1\right]$, d'où $\mathrm{Sp}(g) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(N) = \{3\}$, valeur propre simple. Il y a alors un seul sous-espace propre, qui est une droite vectorielle: $E_3(g) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$, puisque l'on constate ici aussi que la somme des coefficients de chaque ligne vaut 3 (ce qui donne le vecteur propre).

3.a. Yaka l'écrire, puisque $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = C^\top X$.

b. Supposons C vecteur propre de $M^\top$, i.e. $M^\top C = \lambda\, C$ pour un certain scalaire λ. En transposant cette relation, on a $C^\top M = \lambda C^\top$. Soit maintenant $x \in \mathbb{K}^n$ un vecteur de H, canoniquement identifié à une matrice-colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on a donc $C^\top X = 0$ d'après **a.** Alors $C^\top(MX) = (C^\top M)X = (\lambda C^\top)X = \lambda(C^\top X) = 0$, donc $MX \in H$ toujours d'après **a.** Mais MX est la matrice-colonne identifiée au vecteur $f(x)$, on a ainsi prouvé que $f(x) \in H$. Donc l'hyperplan H est bien stable par f.

c. Supposons maintenant H stable par f. On a donc

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \qquad X \in H \Longrightarrow MX \in H\ ,$$

ou encore

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \qquad C^\top X = 0 \Longrightarrow C^\top M X = 0\ ,$$

ou encore

$$\textbf{(*)} \qquad \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \qquad C^\top X = 0 \Longrightarrow (M^\top C)^\top X = 0\ .$$

En posant $M^\top C = C' = \begin{pmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_n \end{pmatrix}$, deux cas se présentent:

- si $C' = 0$, alors $M^\top C = 0$, donc C est bien vecteur propre de $M^\top$ pour la valeur propre 0 ;

- si $C' \neq 0$, alors $c'_1 x_1 + \cdots + c'_n x_n = 0$ est l'équation d'un hyperplan H' qui contient H d'après **(*)**, donc $H' = H$ par égalité des dimensions, donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $C' = \lambda C$ puisque l'on sait que deux équations linéaires définissent le même hyperplan si et seulement si elles sont proportionnelles (*dit autrement, deux formes linéaires non nulles ont le même noyau si et seulement si elles sont proportionnelles*), donc $M^\top C = \lambda C$, ce qu'il fallait prouver.

4.a. L'étude faite en **3.** montre que les plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par f sont ceux qui admettent une équation cartésienne de la forme $ax+by+cz=0$, avec $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vecteur propre de $M^\top$. Déterminons donc les vecteurs propres de $M^\top$. Tout d'abord, M et $M^\top$ ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres, ici 0, 1 et 2 d'après **2.a.** On obtient facilement

$$E_0(M^\top) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad , \quad E_1(M^\top) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad , \quad E_2(M^\top) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) .$$

Il y a donc trois plans stables par f, qui ont pour équations respectives:

$$P_0 : \ x - z = 0 \quad , \qquad P_1 : \ -2x + y + z = 0 \quad , \qquad P_2 : \ x + z = 0 \, .$$

Les droites stables par f sont celles qui sont engendrées par des vecteurs propres (résultat du cours), il y en a donc trois, qui sont les trois sous-espaces propres de f obtenus en **2.a.**

Il y a en tout 8 sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par f, à savoir $\{0\}$, les trois “droites propres” obtenues en **2.a.**, les trois plans listés ci-dessus, et $\mathbb{R}^3$.

b. On a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(N^\top) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(N) = \{3\}$ et cette valeur propre est simple puisque $N^\top$ a le même polynôme caractéristique que N. On obtient $E_3(N^\top) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, donc le seul plan de $\mathbb{R}^3$ stable par g est celui d'équation cartésienne $y+z=0$. Il y a en tout 4 sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par g, qui sont $\{0\}$, la “droite propre” $E_3(g)$ obtenue en **2.b.**, le plan ci-dessus, et l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier.

PARTIE B. Recherche de sous-espaces stables. Étude théorique.

5.a. Il y a au moins $\{0\}$ et E qui sont deux s.e.v. distincts et stables par f. Dans le cas de l'endomorphisme v de $\mathbb{R}^2$ associé à la matrice B de la question **1.b.**, il n'y a pas d'autre s.e.v. stable (il n'y a pas de vecteur propre, donc il n'y a pas de droite vectorielle stable).

b. Puisque f est non nul et non injectif, alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un s.e.v. de E, évidemment stable par f, distinct de $\{0\}$ et de E, il y a donc au moins trois s.e.v. stables distincts. Le s.e.v. $\mathrm{Im}(f)$ est aussi stable par f, mais il peut coïncider avec $\mathrm{Ker}(f)$. Mais, si n est impair, $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont alors deux s.e.v. de E distincts (car la somme de leurs dimensions est n impair, par le théorème du rang), distincts aussi de $\{0\}$ et de E, il y a donc au moins quatre s.e.v. stables.

c. L'endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ de la question **1.a.** admet exactement trois s.e.v. stables, qui sont $\{0\}$, $E = \mathbb{R}^2$, et la droite $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$. En effet, c'est la seule droite stable puisqu'il y a une seule valeur propre avec un sous-espace propre qui est cette droite.

6.a. Si $F = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$, où les e_i sont des vecteurs propres de f, notons λ_1, $\cdots$, λ_p les valeurs propres associées, si $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \in F$, alors $f(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i e_i \in F$, donc F est bien stable par f.

b. Supposons $F = E_\lambda(f)$ de dimension au moins égale à 2, alors tout vecteur non nul de F est vecteur propre de f, donc toute droite vectorielle incluse dans F est stable par f. Or il y a une infinité de droites vectorielles incluses dans F: par exemple, si e_1 et e_2 sont deux vecteurs de F non colinéaires, les droites vectorielles $D_\alpha = \mathrm{Vect}(e_1 + \alpha e_2)$, lorsque α décrit $\mathbb{K}$, sont toutes distinctes. Il y a donc une infinité de droites de E stables par f.

c. Si tous les s.e.v. de E sont stables par f, c'est alors le cas en particulier de toutes les droites vectorielles, ce qui veut dire que tout vecteur non nul de E est vecteur propre de E. C'est un exercice classique de montrer que f est alors une homothétie. En effet, pour tout vecteur x non nul, il existe un scalaire λ_x (clairement unique) tel que $f(x) = \lambda_x\, x$.

Soient alors x et y deux vecteurs de E non colinéaires, on a $f(x) = \lambda_x\, x$, $f(y) = \lambda_y\, y$ et $f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y)$, mais on a aussi par linéarité $f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x\, x + \lambda_y\, y$. De ces deux relations et de la liberté de la famille (x, y), on tire $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$, donc $\lambda_x = \lambda_y$.

Si x et y sont deux vecteurs colinéaires mais non nuls, par exemple $y = \alpha x$, alors $f(x) = \lambda_x x$, $f(y) = \lambda_y\, y = \alpha\, \lambda_y\, x$, mézôssi, par linéarité, $f(y) = \alpha f(x) = \alpha\, \lambda_x\, x$. Comme $\alpha \neq 0$ et $x \neq 0_E$, on tire $\lambda_x = \lambda_y$.

Finalement, le scalaire λ_x est le même pour tous les vecteurs x non nuls de E, notons-le λ, on a alors $f(x) = \lambda x$ pour tout vecteur x non nul, et cette relation étant trivialement vraie pour $x = 0_E$, on a bien $f = \lambda\, \mathrm{id}_E$.

7.a. Soit $\mathcal{B}$ une base de E constituée de vecteurs propres de f, une telle base existe car f est diagonalisable. Soit F un s.e.v. de E stable par f, soit $\mathcal{F}$ une base de F. Alors $\mathcal{F}$ est une famille libre dans E, et $\mathcal{B}$ une famille génératrice, le théorème de la base incomplète dit alors qu'il est possible de compléter la famille $\mathcal{F}$ en une base de E en lui adjoignant des vecteurs de $\mathcal{B}$. Notons $\mathcal{F} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$, il existe donc $n - p$ vecteurs ε_{p+1}, $\cdots$, ε_n choisis dans la famille $\mathcal{B}$ tels que $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p, \varepsilon_{p+1}, \cdots, \varepsilon_n)$ soit une base de E. En posant $G = \mathrm{Vect}(\varepsilon_{p+1}, \cdots, \varepsilon_n)$, on construit ainsi un supplémentaire de F dans E, et ce s.e.v. G est stable par f puisqu'il est engendré par des vecteurs propres de f.

b. Posons $S = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} E_\lambda(f)$ comme le suggère l'énoncé. Alors S est stable par f car il est engendré par des vecteurs propres de f. Il admet donc un supplémentaire G lui aussi stable par f par hypothèse. Si on suppose $G \neq \{0_E\}$, alors l'endomorphisme induit f_G admet au moins une valeur propre (puisque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), et il existe alors un vecteur propre x associé, qui est alors aussi vecteur propre de f. Ce vecteur x est non nul et appartient à $S \cap G$, ce qui est absurde. On a donc nécessairement $G = \{0_E\}$, donc $S = E$, ce qui signifie que f est diagonalisable.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ce n'est plus vrai, un contre-exemple est donné par l'endomorphisme v de $\mathbb{R}^2$

introduit en **1.b.** En effet, les seuls sous-espaces de $\mathbb{R}^2$ stables par v sont $\{0\}$ et $\mathbb{R}^2$, qui admettent chacun un supplémentaire stable (respectivement $\mathbb{R}^2$ et $\{0\}$), pourtant v n'est pas diagonalisable puisqu'il n'admet aucune valeur propre.

8. Si f est trigonalisable, il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E dans laquelle f est représenté par une matrice triangulaire supérieure, les sous-espaces $F_k = \text{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$ vérifient alors les conditions demandées.
Réciproquement, supposons l'existence des sous-espaces F_k, $0 \leq k \leq n$. On construit par récurrence une famille de vecteurs $(e_1, \cdots, e_n)$ telle que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on ait $F_k = \text{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$. Pour cela, on prend pour e_1 un vecteur directeur de la droite vectorielle F_1 et, si l'on suppose construits e_1, $\cdots$, e_k avec $1 \leq k \leq n-1$, comme le sous-espace F_k peut être considéré comme un hyperplan dans F_{k+1}, si l'on prend un vecteur e_{k+1} dans $F_{k+1} \backslash F_k$, on a $F_{k+1} = F_k \oplus \text{Vect}(e_{k+1}) = \text{Vect}(e_1, \cdots, e_k) \oplus \text{Vect}(e_{k+1}) = \text{Vect}(e_1, \cdots, e_{k+1})$.
Au final, la famille $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ engendre $E = F_n$ et c'en est une base car elle a le bon cardinal. Enfin, la stabilité des sous-espaces F_k fait que la matrice de f dans cette base est triangulaire supérieure.

PARTIE C. Une CNS de stabilité (cas diagonalisable).

9. Soit $x \in F$. Il existe $(x_1, \cdots, x_p) \in (F \cap E_1) \times \cdots \times (F \cap E_p)$ tel que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i$. On a alors $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ et, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $\lambda_i x_i \in F \cap E_i$, donc $f(x) \in F$. On a prouvé que F est stable par f.

10.a. Comme f est diagonalisable, $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$, donc x admet une unique décomposition en $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i$ avec chaque x_i dans E_i.

b. La famille $\mathcal{B}_x$ est génératrice de V_x par définition de V_x, et elle est libre car c'est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes de f.

c. Une récurrence immédiate donne $f^{j-1}(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{j-1} x_i$ pour tout $j \in [\![1, r]\!]$, on a donc $f^{j-1}(x) \in \text{Vect}(x_1, \cdots, x_r) = V_x$. Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}_x}(\mathcal{F}_x) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{r-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{r-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \cdots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$.
On reconnaît une matrice de Vandermonde.

d. Comme les λ_i sont deux à deux distincts, le déterminant (de Vandermonde) de la matrice ci-dessus est non nul, on en déduit que la famille $\mathcal{F}_x$ est une base de V_x.

e. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, le vecteur x_i appartient à V_x, donc est combinaison linéaire des vecteurs de la famille $\mathcal{F}_x$ d'après **d.**, i.e. $x_i \in \text{Vect}\big(x, f(x), \cdots, f^{r-1}(x)\big)$. Comme $x \in F$ et que F est supposé stable par f, les vecteurs $f^{j-1}(x)$, avec $1 \leq j \leq r$, sont dans F, puis $x_i \in F$ comme combinaison linéaire de vecteurs de F. Donc $x_i \in F \cap E_i$ pour $i \in [\![1, r]\!]$.

Enfin, $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} x_i \in \bigoplus_{i=1}^{r} (F \cap E_i)$, et a fortiori $x \in \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} (F \cap E_i)$.

On a ainsi prouvé l'inclusion $F \subset \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} (F \cap E_i)$, et l'inclusion inverse est immédiate.