Normes, suites convergentes.

1. Soient N et N' deux normes sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

a. On note B et B' les boules unités fermées, i.e.

$$B = \{x \in E \mid N(x) \leq 1\} \qquad \text{et} \qquad B' = \{x \in E \mid N'(x) \leq 1\} .$$

Montrer que $B = B' \Longrightarrow N = N'$.

b. Même question avec les boules unités ouvertes.

2. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N(x, y) = \max\limits_{t\in[0,1]} |x + ty|$.

a. Montrer que l'application N est une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

b. Soit B la boule unité fermée de centre O pour la norme N. Montrer que $B = \bigcap\limits_{t\in[0,1]} B_t$, avec $B_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + ty| \leq 1\}$. Montrer que $B = B_0 \cap B_1$. Dessiner B.

3. Pour toute matrice A appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|A\| = \max\limits_{1\leq i\leq n} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right)$.

a. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Montrer que l'on a $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$ pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c. Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^\top \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $\|X\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$. Prouver la relation $\|AX\|_\infty \leq \|A\| \, \|X\|_\infty$.

d. Montrer que toute valeur propre réelle λ de la matrice A vérifie $|\lambda| \leq \|A\|$.

4. Soit $E = \mathcal{C}^1\big([0, 1], \mathbb{R}\big)$. Pour $f \in E$, on pose $N(f) = \left(f(0)^2 + \displaystyle\int_0^1 f'(t)^2 \, \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$.

a. Montrer que N est une norme sur E.

b. Soit $f \in E$. Montrer que

$$\forall x \in [0, 1] \qquad f(x)^2 \leq 2\, f(0)^2 + 2 \left(\int_0^x |f'(t)| \, \mathrm{d}t\right)^2 .$$

c. En déduire que, pour tout $f \in E$, on a $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}\, N(f)$.

5.a. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N(P) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(k)\right|$. Montrer que N est une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

b. Soient $n + 1$ réels $a_0, a_1, \cdots, a_n$ tels que $\forall k \in [\![0, n]\!] \quad P^{(k)}(k) = a_k$. Montrer que cela détermine le polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

6. Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P \in E$ et $a \in [0, 1]$, on pose

$$N_a(P) = \left|P(a)\right| + \int_0^1 \left|P'(t)\right| \mathrm{d}t .$$

a. Montrer que, pour tout $a \in [0, 1]$, N_a est une norme sur E.

b. Soit $(a, b) \in [0, 1]^2$. Montrer que les normes N_a et N_b sur E sont équivalentes.

7. Soient $f_1, \cdots, f_n$ des applications continues de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$. À quelle condition l'application $N : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$N : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto \|x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n\|_\infty$$

définit-elle une norme sur $\mathbb{K}^n$?

8. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Soit u un endomorphisme de E tel que

$$\forall x \in E \qquad \|u(x)\| \leq \|x\| \ .$$

Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E)$.

Topologie.

9. Soit A une partie de $\mathbb{R}$, non vide et majorée, soit $M = \sup(A)$ sa borne supérieure.

a. Montrer que $M \in \overline{A}$.

b. Montrer que M est le seul majorant de la partie A qui soit adhérent à A.

10. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que tout sous-espace vectoriel de E est une partie fermée de E.

11. Soit E un espace vectoriel normé, soit F un sous-espace vectoriel de E.

Deux questions indépendantes

a. Montrer que l'adhérence $\overline{F}$ de F est un sous-espace vectoriel de E.

b. Montrer que, si F admet un point intérieur, alors $F = E$.

12. Soit A une partie convexe d'un espace vectoriel normé E.

a. Montrer que son adhérence $\overline{A}$ est convexe.

b*. Montrer que son intérieur $\overset{\circ}{A}$ est convexe.

13. Montrer qu'une partie A d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est convexe si et seulement si, pour tout couple $(x, y) \in E^2$, l'ensemble $I_{x,y} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid x + \lambda y \in A\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Limites et continuité des fonctions vectorielles de variable vectorielle

14. Étudier la limite éventuelle en $(0,0)$ des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ ci-dessous:

a. $(x,y) \mapsto \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$; **b.** $(x,y) \mapsto \dfrac{xy}{x^4 + y^4}$; **c.** $(x,y) \mapsto \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.

15. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{e^x - e^y}{x - y}$ si $x \neq y$, et $f(x,x) = e^x$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

16. Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $\lim\limits_{k \to +\infty} A_k = A$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} A_k^{-1} = B$. Montrer que A est inversible et $A^{-1} = B$.

17. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = P$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} B^k = Q$.

a. Montrer que P et Q sont des matrices de projecteurs. Calculer AP et PA.

b. On suppose que A et B commutent. Montrer que P et Q commutent.

18. Soit $T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculer T^k pour $k \in \mathbb{N}$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n$, avec $M_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} T^k$.

19. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Pour tout $x \in E$, on pose $f(x) = \dfrac{x}{1+\|x\|}$.

On note $B = B(0_E, 1) = \{x \in E \mid \|x\| < 1\}$ la boule unité ouverte de E.

a. Montrer que f est une bijection de E sur B, expliciter f^{-1}.

b. Montrer que f et f^{-1} sont continues.

c*. Montrer que f est 1-lipschitzienne. L'apllication f^{-1} est-elle lipschitzienne ?

20. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer l'équivalence entre les trois assertions suivantes:

(a): u est lipschitzienne ; **(b)**: u est continue sur E ; **(c)**: u est continue en 0_E.

21. Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Soit $T_p = T + \mathrm{diag}\left(\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \cdots, \frac{n}{p}\right)$. Montrer que, pour p suffisamment grand, la matrice T_p admet n valeurs propres distinctes. En déduire que toute matrice trigonalisable est limite d'une suite de matrices diagonalisables.

22.a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $d_n : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $A \mapsto d_n(A) = \det(A)$, est continue.

b. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est limite d'une suite de matrices inversibles.

c. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique. *On étudiera d'abord le cas particulier où A est inversible.*

23*. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue, soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon $R > 0$.

a. Montrer qu'il existe deux points A et B de $\mathcal{C}$ diamétralement opposés tels que $g(A) = g(B)$.

b. Montrer qu'il existe deux points C et D de $\mathcal{C}$, se déduisant l'un de l'autre par un quart de tour de centre O, tels que $g(C) = g(D)$.

Dérivation des fonctions vectorielles de variable réelle

24. Soit E un espace euclidien, soit $f : [a, b] \to E$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, de dérivée bornée sur $]a, b[$: $\exists M \in \mathbb{R}_+ \quad \forall t \in]a, b[\quad \|f'(t)\| \leq M$. En considérant l'application $\varphi : t \mapsto \big(f(b) - f(a) | f(t)\big)$, montrer l'inégalité

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M(b - a) .$$

25. Soit E un espace euclidien, soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\forall t \in I \quad f(t) \neq 0$. On pose $\varphi(t) = \|f(t)\|$ pour tout $t \in I$. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, et calculer φ' et φ''.

Réponse partielle. On obtient $\varphi'(t) = \dfrac{\big(f(t)|f'(t)\big)}{\|f(t)\|}$.

UN PETIT PROBLÈME

Dans tout ce problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour tout réel t strictement positif, on note $D_t = \mathrm{diag}(t, t^2, t^3, \cdots, t^n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice carrée d'ordre n, on note $\mathcal{S}_A$ la **classe de similtude** de A, c'est-à-dire l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui sont semblables à la matrice A:

$$\mathcal{S}_A = \left\{P^{-1}MP\ ;\ P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\right\}.$$

On appelle **matrice scalaire** toute matrice de la forme λI_n, avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

On pourra considérer que l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par

$$\forall M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \qquad \|M\| = \max_{1 \leq i,j \leq n} \left|m_{i,j}\right|.$$

A. Une question préliminaire.

1. On considère une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour tout réel strictement positif t, on considère la matrice $B(t) = D_t\, A\, D_t^{-1}$. Expliciter les coefficients $b_{i,j}(t)$ de la matrice $B(t)$ en fonction de t et des $a_{i,j}$.

B. Caractérisation des matrices scalaires.

2. Si A est une matrice scalaire, préciser sa classe de similitude $\mathcal{S}_A$.

3. Déduire de la question **1.** que, si la classe de similitude $\mathcal{S}_A$ d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une partie bornée de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors la matrice A est nécessairement diagonale.

4. Dans cette question seulement, $n = 2$ et A est une matrice diagonale $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. Pour k entier naturel non nul, on pose $Q_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -k & k \end{pmatrix}$. Calculer le produit $Q_k\, A\, Q_k^{-1}$. En déduire que la classe de similitude $\mathcal{S}_A$ est bornée si et seulement si $\lambda = \mu$.

5. On reprend n quelconque et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ supposée ici diagonale: $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Montrer que la partie $\mathcal{S}_A$ est bornée si et seulement si les λ_i sont tous égaux.

6. Conclure que la classe de similitude $\mathcal{S}_A$ d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est bornée si et seulement si A est une matrice scalaire.

C. Caractérisation des matrices nilpotentes.

7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente, i.e. il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0_n$. Montrer que la classe de similitude $\mathcal{S}_A$ contient une matrice R triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont nuls. En utilisant la question **1.**, montrer que $0_n \in \overline{\mathcal{S}_A}$, i.e. la matrice nulle est adhérente à la partie $\mathcal{S}_A$.

8. Inversement, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice telle que $0_n \in \overline{\mathcal{S}_A}$, il existe donc une suite (A_k) de matrices de $\mathcal{S}_A$ convergeant vers la matrice nulle. En déduire que $\chi_A = X^n$, et conclure.