

**Rayon de convergence.**

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières  $\sum a_n z^n$ , avec

a.  $a_n = \frac{n!}{n^n}$  ; b.  $a_n = n^{(-1)^n}$  ; c.  $a_n = \binom{2n}{n}$  ; d.  $a_n = \lfloor 10^n \pi \rfloor - 10 \times \lfloor 10^{n-1} \pi \rfloor$

(dans le d., le coefficient  $a_n$  est la  $n$ -ème décimale du nombre  $\pi$ ).

a. On a  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{e}$ , donc  $R = e$  par la règle de d'Alembert.

b. On a  $a_n = n$  si  $n$  est pair,  $a_n = \frac{1}{n}$  si  $n$  est impair. Dans les deux cas,  $\frac{1}{n} \leq a_n \leq n$  pour tout  $n \geq 1$ . Les séries entières  $\sum nx^n$  et  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$  ayant toutes deux pour rayon de convergence 1 (par application immédiate de la règle de d'Alembert), on déduit, par comparaison, que  $R = 1$ .

c.  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1}$  après quelques simplifications. Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4$ , puis  $R = \frac{1}{4}$ .

d. La suite  $(a_n)$  est bornée puisque  $0 \leq a_n \leq 9$ , donc  $R \geq 1$ . La série  $\sum a_n$  diverge grossièrement car il est bien connu que le nombre  $\pi$  n'est pas décimal (il est même irrationnel), donc les  $a_n$  ne peuvent être tous nuls à partir d'un certain rang, on trouve donc dans la suite  $(a_n)$  une infinité de termes supérieurs ou égaux à 1, cette suite ne peut donc tendre vers zéro. On en déduit que  $R \leq 1$ . Finalement  $R = 1$ .

2. On suppose que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$ , avec  $l \in \overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty]$ . Quel est le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  ?

Montrons que le rayon de convergence est  $R = \frac{1}{l}$  avec les conventions habituelles ( $\frac{1}{l} = 0$  si  $l = +\infty$ , et  $\frac{1}{l} = +\infty$  si  $l = 0$ ). Posons  $J = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ .

$\triangleright$  soit  $r \in \mathbb{R}_+$  tel que  $r < \frac{1}{l}$ , alors  $rl < 1$  et, comme

$$(*) : \quad \sqrt[n]{|a_n|r^n} = r \sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} rl,$$

on a  $\sqrt[n]{|a_n|r^n} < 1$  à partir d'un certain rang, donc aussi  $|a_n|r^n < 1$  APCR, et la suite  $(|a_n|r^n)$  est bornée, donc  $r \in J$ .

On a prouvé que  $\left[0, \frac{1}{l}\right[ \subset J$ , donc  $R \geq \frac{1}{l}$ .

$\triangleright$  Soit  $r \in \mathbb{R}_+$  tel que  $r > \frac{1}{l}$ , alors  $rl > 1$  et, de (\*), on déduit que  $|a_n|r^n > 1$  à partir d'un certain rang, donc la série  $\sum a_n r^n$  est grossièrement divergente, ce qui prouve que  $r \geq R$ .

On a ainsi montré que  $\left] \frac{1}{l}, +\infty \right[ \subset [R, +\infty[,$  ce qui entraîne  $R \leq \frac{1}{l}$ .

**Bilan.**  $R = \frac{1}{l}$ .

---

**3.** Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R \in [0, +\infty]$ .

a. Soit  $P$  un polynôme non nul. Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 0} P(n) a_n z^n$ .

b. Déterminer le rayon de convergence des séries entières  $\sum_{n \geq 0} a_n z^{2n}$  et  $\sum_{n \geq 0} a_n^2 z^n$ .

---

a. Allons-y par petites touches : d'abord, si deux séries entières  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  sont telles que  $a_n \sim b_n$ , alors elles ont le même rayon de convergence : en effet, si  $a_n \sim b_n$ , alors il existe des constantes  $C_1$  et  $C_2$  strictement positives telles que  $C_1 |a_n| \leq |b_n| \leq C_2 |a_n|$  à partir d'un certain rang. De  $|b_n| \geq C_1 |a_n|$ , on déduit que  $R_B \leq R_A$ , et de  $|b_n| \leq C_2 |a_n|$ , on déduit  $R_B \geq R_A$ , donc  $R_B = R_A$ .

Si  $P$  est un polynôme constant non nul, la série entière  $\sum P(n) a_n z^n$  a aussi pour rayon de convergence  $R$  (*évident*). Si  $P$  est un polynôme de degré  $d > 0$ , on a  $P(n) a_n \sim C n^d a_n$ , où  $C$  est une constante non nulle (le coefficient dominant du polynôme  $P$ ), il suffit donc de montrer que la série entière  $\sum_{n \geq 0} n^d a_n z^n$  a le même rayon de convergence que  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ .

Or on sait que la série  $\sum n a_n z^n$  a le même rayon de convergence  $R$  que la série  $\sum a_n z^n$  puisque c'est (presque) sa série dérivée, il suffit donc d'itérer  $d$  fois ce raisonnement pour conclure.

b. On sait que  $R = \sup(J)$ , avec  $J = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$ . Le rayon de convergence  $R'$  de  $\sum a_n z^{2n}$  est  $R' = \sup(J')$ , avec  $J' = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } (a_n r^{2n}) \text{ est bornée}\}$ . Or,  $r \in J' \iff r^2 \in J$ , donc l'intervalle  $J'$  est constitué exactement des racines carrées des éléments de  $J$ , puis  $R' = \sqrt{R}$ .

De même, le rayon de convergence  $R''$  de  $\sum a_n^2 z^n$  est  $R'' = \sup(J'')$ , avec

$$J'' = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } (a_n^2 r^n) \text{ est bornée}\} = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } (a_n (\sqrt{r})^n) \text{ est bornée}\}.$$

*En effet, une suite est bornée si et seulement si la suite des carrés est bornée.* Donc  $r \in J'' \iff \sqrt{r} \in J$ , l'intervalle  $J''$  est constitué exactement des carrés des éléments de  $J$ , d'où  $R'' = R^2$ .

**Attention!** Il aurait été faux de commencer la démonstration par : “la série entière  $\sum a_n z^n$  a pour rayon de convergence  $R$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{R}$ ” ...!!! Je rappelle qu'il n'y a pas de réciproque à la règle de d'Alembert!

---

4. Soit une série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  de rayon de convergence non nul. Montrer que la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \frac{a_n z^n}{n!} \text{ a un rayon de convergence infini.}$$


---

Puisque la première série entière a un rayon de convergence non nul, il existe un  $r > 0$  tel que la suite  $(a_n r^n)$  soit bornée :  $|a_n| r^n \leq M$ . On en déduit une majoration des coefficients par une suite géométrique :  $|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$ , avec  $M > 0$  et  $r > 0$ . Il en résulte la majoration  $\left| \frac{a_n}{n!} \right| \leq \frac{M}{n! r^n}$  et, comme la série entière  $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n! r^n}$  a un rayon de convergence infini (c'est une série exponentielle), par comparaison, la série entière  $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n z^n}{n!}$  a aussi un rayon de convergence infini.

---



---

#### Expression de la somme d'une série entière.

5. Rayon de convergence et calcul de la somme des séries entières  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)}$  et  $\sum_{n \geq 0} \frac{\operatorname{ch} n}{n!} x^n$ .

---

a. La règle de d'Alembert donne immédiatement  $R = 1$ . Posons  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)}$  pour  $x \in ]-1, 1[$  intervalle de convergence. On a alors

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{2n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{+\infty} (x^2)^n = \frac{x}{1-x^2}.$$

Puis, comme  $f'(0) = 0$ , on a  $f'(x) = -\frac{1}{2} \ln(1-x^2) = -\frac{1}{2} [\ln(1+x) + \ln(1-x)]$ , enfin comme  $f(0) = 0$ , tenant compte de  $\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x$ , on obtient

$$f(x) = x - \frac{1}{2} [(1+x) \ln(1+x) - (1-x) \ln(1-x)].$$

Pour approfondir, notons que la série entière converge normalement sur  $[-1, 1]$  fermé, donc la fonction somme est définie et continue sur  $[-1, 1]$  fermé. Ainsi,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 - \ln(2)$ . Comme  $f$  est impaire,  $f(-1) = \ln(2) - 1$ .

b. On a  $\operatorname{ch}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} e^x$ , donc  $a_n = \frac{\operatorname{ch}(n)}{n!} \sim \frac{e^n}{2n!}$ , puis

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \frac{\operatorname{ch}(n+1)}{\operatorname{ch}(n)} \sim \frac{e}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc  $R = +\infty$  par la règle de d'Alembert. Posons donc  $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\text{ch}(n)}{n!} x^n$  pour tout  $x$  réel. Alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n + e^{-n}}{2n!} x^n \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ex)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^{-1}x)^n}{n!} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \exp(ex) + \exp\left(\frac{x}{e}\right) \right]. \end{aligned}$$


---

**6.** Rayon de convergence et calcul de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-3}{(n-1)!} x^n$ .

Posons  $a_n = \frac{n-3}{(n-1)!}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors, pour  $n \geq 4$ , on a  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n-2}{n(n-3)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .

La règle de d'Alembert permet donc d'affirmer que le rayon de convergence de la série entière est infini. Posons  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-3}{(n-1)!} x^n$  pour  $x \in \mathbb{R}$ . On écrit

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)-2}{(n-1)!} x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-2)!} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n!} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = x^2 e^x - 2x e^x. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x(x-2) e^x$ .

---

**7.** On rappelle que  $\forall x \in ]-1, 1[ \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ . Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$  et calculer sa somme en tout point  $x$  de l'intervalle ouvert de convergence. Que se passe-t-il aux bornes de cet intervalle ?

En posant  $u_n(x) = \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$ , on a  $\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \frac{n(2n+1)}{(n+2)(2n+3)} x^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x^2$  donc la série entière de terme général  $u_n(x)$  est convergente lorsque  $|x| < 1$ , divergente lorsque  $|x| > 1$  ; son rayon de convergence est donc 1.

Faisons le calcul de  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$  pour  $x \in ]-1, 1[$  (*intervalle de convergence*). Pour cela, on utilise la décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}.$$

On obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n+1} - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+1} \\ &= x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n} - 4x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

(les trois séries sont convergentes pour  $x \in ]-1, 1[$  puisque ce sont trois séries entières de rayon de convergence 1). Pour  $t \in ]-1, 1[$ , on a  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = -\ln(1-t)$ . En posant  $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$  pour  $x \in ]-1, 1[$ , on a  $g(0) = 0$  et  $g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{2n} = \frac{x^2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2} - 1$ , donc

$$g(x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} - x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x.$$

On obtient donc, pour  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 \ln(1-x^2) - \ln(1-x^2) - x^2 - 2x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + 4x^2 \\ &= 3x^2 - (x^2 + 1) [\ln(1+x) + \ln(1-x)] - 2x [\ln(1+x) - \ln(1-x)] \\ &= 3x^2 - (1+x)^2 \ln(1+x) - (1-x)^2 \ln(1-x). \end{aligned}$$

La série entière  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge normalement sur le segment  $[-1, 1]$  puisque  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$  est une série numérique convergente (terme général équivalent à  $\frac{1}{2n^3}$ ). Sa somme  $f$  est donc une fonction définie et continue sur le segment  $[-1, 1]$ , nous avons calculé l'expression de  $f(x)$  pour  $x \in ]-1, 1[$ ; pour avoir  $f(1)$ , il suffit donc de faire tendre  $x$  vers 1 dans l'expression obtenue. En utilisant  $\lim_{u \rightarrow 0} u^2 \ln u = 0$ , on obtient  $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 - 4 \ln 2$ .

Ainsi,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = 3 - 4 \ln 2$ . Bien sûr, la fonction  $f$  est paire et  $f(-1) = f(1)$ .

- 8.** Rayon de convergence et somme de  $\sum_{n \geq 1} \frac{n x^n}{(2n+1)!}$ .

-----

Le rayon de convergence est  $+\infty$ , par application immédiate de la règle de d'Alembert.

Posons  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n x^n}{(2n+1)!}$  pour  $x \in \mathbb{R}$ . On voit facilement que  $f(x) = x g'(x)$ , avec

$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!}$ . Pour  $x > 0$ , on a  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$  et, pour  $x < 0$ , on a

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{-x})^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{1}{\sqrt{-x}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{-x})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\sin(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}}.$$

Finalement,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\sqrt{-x})}{2} - \frac{\sin(\sqrt{-x})}{2\sqrt{-x}} & \text{si } x < 0 ; \\ \frac{\cosh(\sqrt{x})}{2} - \frac{\sinh(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 ; \end{cases} ; \quad f(0) = 0 .$$

9. Soit  $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$ .

a. Ensemble de définition de  $f$  ?

b. Exprimer  $f(x)$  à l'aide de fonctions usuelles sur  $] -1, 1[$ .

c. Calculer  $f(1)$  et  $f(-1)$ .

a. On reconnaît une série entière de rayon de convergence 1 (par exemple par la règle de d'Alembert). D'autre part, cette série entière converge normalement sur  $[-1, 1]$  puisque la série à termes positifs  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$  est convergente. Donc  $D_f = [-1, 1]$ .

b. En décomposant en éléments simples, et en utilisant le fait que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = \ln(1+x)$  pour  $x \in ] -1, 1[$ , on obtient, toujours pour  $x \in ] -1, 1[$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) x^n = x \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n-1}}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} \\ &= x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \\ &= x \ln(1+x) + (\ln(1+x) - x) = (1+x) \ln(1+x) - x . \end{aligned}$$

c. Comme la série définissant  $f$  converge normalement sur  $[-1, 1]$  et que chacune des fonctions est continue, la somme  $f$  est continue sur  $[-1, 1]$ . On a donc

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \ln(2) - 1 \quad \text{et} \quad f(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = 1 .$$

**10.** Rayon de convergence et calcul de  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} x^n$ .

Posons  $a_n = \frac{\sin n}{n}$ . Comme la suite  $(a_n)$  est bornée, on déduit que le rayon de convergence  $R$  de la série entière vérifie  $R \geq 1$ . Pour  $x \in ]-1, 1[$ , posons  $s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} x^n$ . Alors  $s(x) = \operatorname{Im} f(x)$ , avec  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in}}{n} x^n$  (*la règle de d'Alembert montre que le rayon de convergence de cette dernière série entière est 1 exactement*). Par ailleurs, pour  $x \in ]-1, 1[$ , on a

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{in} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{i(n+1)} x^n = e^i \sum_{n=0}^{+\infty} (x e^i)^n = \frac{e^i}{1 - x e^i}.$$

Continuons à torturer cette expression afin d'en extraire (même s'il faut recourir au supplice qui consiste à multiplier et diviser par le conjugué du dénominateur) la partie imaginaire :

$$f'(x) = \frac{e^i (1 - x e^{-i})}{(1 - x e^i)(1 - x e^{-i})} = \frac{e^i - x}{1 - 2x \cos 1 + x^2} = \frac{\cos 1 - x + i \sin 1}{1 - 2x \cos 1 + x^2}.$$

Donc  $s'(x) = \operatorname{Im} f'(x) = \frac{\sin 1}{1 - 2x \cos 1 + x^2} = \frac{\sin 1}{(x - \cos 1)^2 + \sin^2 1}$ , et un calcul classique de primitive, avec le changement de variable affine  $x - \cos 1 = t \sin 1$ , donne

$$\int \frac{\sin 1 \, dx}{(x - \cos 1)^2 + \sin^2 1} = \int \frac{\sin^2 1 \, dt}{\sin^2 1 (t^2 + 1)} = \operatorname{Arctan} t = \operatorname{Arctan} \left( \frac{x - \cos 1}{\sin 1} \right).$$

On a donc, pour  $x \in ]-1, 1[$ ,  $s(x) = \operatorname{Arctan} \left( \frac{x - \cos 1}{\sin 1} \right) + C$ , où  $C$  est une constante que l'on détermine grâce à la relation  $s(0) = 0$ . On obtient  $C = \operatorname{Arctan}(\cotan 1) = \frac{\pi}{2} - 1$ , d'où

$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} x^n = \operatorname{Arctan} \left( \frac{x - \cos 1}{\sin 1} \right) + \frac{\pi}{2} - 1.$$

*Remarque :* On peut montrer aussi, par un autre calcul que je n'expliciterai pas, que

$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad s(x) = \operatorname{Arctan} \left( \frac{x \sin 1}{1 - x \cos 1} \right).$$

*On montre en fait que les deux expressions ci-dessus ont la même dérivée et prennent la même valeur pour  $x = 0$ .*

**11.** Pour  $x \in \mathbb{R}$ , calculer  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ .

*Solution 1.* On a facilement  $R = +\infty$  et, sachant que, pour tout  $z$  complexe,  $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ , on déduit

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad e^z + e^{jz} + e^{j^2 z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 + j^n + j^{2n}) \frac{z^n}{n!} = 3 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{z^{3p}}{(3p)!}$$

en posant  $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  (racine cubique de l'unité), on a en effet la relation  $1 + j + j^2 = 0$  et, plus généralement,  $1 + j^n + j^{2n} = 1 + j^n + (j^n)^2$  vaut 3 si l'entier  $n$  est multiple de 3, et 0 sinon. Donc

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{3n}}{(3n)!} = \frac{1}{3} (e^z + e^{jz} + e^{j^2 z}).$$

Pour  $x$  réel, on obtient

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{3} \left( e^x + e^{-\frac{x}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}x} + e^{-\frac{x}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}x} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left( e^x + 2 e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right). \end{aligned}$$

*Solution 2.* On a facilement  $R = +\infty$  et, comme la fonction somme d'une série entière est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et se dérive terme à terme sur l'intervalle de convergence (ici  $\mathbb{R}$ ), on obtient

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}, \text{ puis } S''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!}.$$

On remarque alors que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad S(x) + S'(x) + S''(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^p}{p!} = e^x :$$

la fonction  $S$  est solution de l'équation différentielle (E) :  $y'' + y' + y = e^x$ . Cette équation linéaire admet pour solution évidente  $y = \frac{1}{3}e^x$ , puis l'équation sans second membre associée fait intervenir l'équation caractéristique  $r^2 + r + 1 = 0$ , dont les racines sont  $j$  et  $j^2$  (*cf. solution 1*). Les solutions de (E) sont alors les fonctions de la forme

$$y = \frac{1}{3}e^x + A e^{jx} + B e^{j^2 x} = \frac{1}{3}e^x + e^{-\frac{x}{2}} \left( \lambda \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + \mu \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right).$$

En tenant compte des conditions initiales  $S(0) = 1$  et  $S'(0) = 0$ , on obtient (*il y a un peu de calcul*)  $\lambda = \frac{2}{3}$  et  $\mu = 0$ , ce qui donne le résultat obtenu par la *solution 1*.

**12.** Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ , de somme  $f(z)$ .

- a. Pour  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < R$ , exprimer  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^{2n}$  à l'aide de  $f$ .
- b. Même question avec  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{3n} z^{3n}$ .

- Si  $|z| < R$ , on a  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  et  $f(-z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n z^n$ , donc  

$$f(z) + f(-z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 + (-1)^n) a_n z^n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2p} z^{2p}$$

(seuls restent les termes d'indices pairs, et on réindexe). Ainsi,

$$\forall z \in D(0, R) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^{2n} = \frac{1}{2} (f(z) + f(-z)) .$$

- Introduisons le nombre complexe  $j = e^{\frac{i2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  (racine cubique de l'unité). On a alors les relations  $j^3 = 1$  et  $1 + j + j^2 = 0$ . Les racines cubiques de l'unité sont 1,  $j$  et  $j^2$ . Si  $|z| < R$ , alors

$$f(z) + f(jz) + f(j^2z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 + j^n + j^{2n}) a_n z^n$$

et on vérifie que  $1 + j^n + j^{2n} = \begin{cases} 3 & \text{si } n \text{ est multiple de 3} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . Il ne reste alors que les

termes dont l'indice est de la forme  $3p$ , donc  $f(z) + f(jz) + f(j^2z) = 3 \sum_{p=0}^{+\infty} a_{3p} z^{3p}$ . Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{3n} z^{3n} = \frac{1}{3} (f(z) + f(jz) + f(j^2z)) .$$

- 13.** Pour tout  $n$  entier naturel, on pose  $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$ . Déterminer le rayon de convergence  $R$  et la somme de la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ . Quelle est la nature des séries numériques  $\sum_{n \geq 0} a_n$  et  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$  ? En cas de convergence, calculer leur somme.

- Notons d'abord que, pour  $t \in [0, 1]$ , on a  $1 \leq 1+t \leq 2$ , on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2} \int_0^1 t^n dt \leq a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} .$$

La série entière  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} x^n$  ayant pour rayon de convergence 1 (la règle de d'Alembert s'applique "gentiment"), on en déduit par comparaison que  $1 \leq R \leq 1$ , donc  $R = 1$ .

- Par ailleurs, la minoration  $a_n \geq \frac{1}{2(n+1)}$  montre (comparaison de séries à termes positifs) que la série entière diverge pour  $x = 1$ , i.e. la série numérique  $\sum_{n \geq 0} a_n$  est divergente.

- La suite  $(a_n)$  est décroissante (*immédiat*) et tend vers zéro (d'après la majoration obtenue ci-dessus), donc par le critère spécial des séries alternées, la série  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$  converge.

• Posons  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  (fonction somme de la série entière). D'après ce qui précède, on a  $D_f = [-1, 1[$ . Calculons d'abord  $f(x)$  pour  $x \in ] -1, 1[$  (intervalle de convergence).

On a alors  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(xt)^n}{1+t} dt$ , on est bien sûr tenté d'intervertir série et intégrale.

Justifions-le : Fixons  $x \in ] -1, 1[$  et posons  $u_n(t) = \frac{(xt)^n}{1+t}$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in [0, 1]$  ; on a alors  $|u_n(t)| \leq |x|^n$ , et la série  $\sum_{n \geq 0} |x|^n$  converge, on a ainsi prouvé la convergence normale

sur  $[0, 1]$  de la série de fonctions (continues)  $\sum_{n \geq 0} u_n$ , ce qui autorise l'interversion. Donc

$$f(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+t} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} (xt)^n \right) dt = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)(1-xt)} .$$

On décompose en éléments simples :  $\frac{1}{(1+t)(1-xt)} = \frac{1}{1+x} \left( \frac{1}{1+t} + \frac{x}{1-xt} \right)$ , le détail du calcul est laissé au lecteur mais n'est pas difficile puisque la fraction rationnelle à décomposer admet deux pôles simples qui sont  $-1$  et  $\frac{1}{x}$  (*en toute rigueur, le cas  $x = 0$  doit être traité à part, mais au final on obtient le même résultat*). Donc

$$\forall x \in ] -1, 1[ \quad f(x) = \frac{1}{1+x} \left( \int_0^1 \frac{dt}{1+t} + \int_0^1 \frac{x dt}{1-xt} \right) = \frac{\ln(2) - \ln(1-x)}{1+x} .$$

• Calculons enfin  $f(-1)$  ; l'interversion série-intégrale faite ci-dessus ne peut plus être justifiée de la même façon, la série de fonctions  $\sum u_n$  n'étant plus normalement convergente. Démontrons la continuité sur  $[-1, 0]$  de la fonction  $f$ . Pour  $x \in [-1, 0]$  et  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $v_n(x) = a_n x^n = (-1)^n a_n |x|^n$  (puisque  $a_n$  est positif et  $x$  est négatif). La suite  $(a_n |x|^n)$  est décroissante (*par exemple comme produit de deux suites positives décroissantes*) et tend vers zéro (puisque  $0 \leq a_n |x|^n \leq \frac{1}{n+1}$ ), donc le critère spécial des séries alternées s'applique, celui-là même qui permet de majorer en valeur absolue le reste d'ordre  $n$  par le “premier terme négligé”, soit

$$\forall x \in [-1, 0] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |r_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \right| \leq a_{n+1} |x|^{n+1} \leq a_{n+1} \leq \frac{1}{n+2} ;$$

on a ainsi prouvé la convergence uniforme de la suite de fonctions  $(r_n)$  vers la fonction nulle sur  $[-1, 0]$ , donc la convergence uniforme sur  $[-1, 0]$  de la série entière définissant  $f$ . On en déduit la continuité de  $f$  sur  $[-1, 0]$ , et particulièrement au point  $-1$ , donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = f(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(1-x) - \ln(2)}{1+x} = \frac{1}{2}$$

(je pense que vous avez reconnu un taux d'accroissement!).

---



---

### Propriétés de la fonction somme.

**14.** On pose  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$  pour tout réel  $x$  tel que la série converge.

- a. Quel est l'ensemble de définition de  $f$  ?
- b. Montrer que  $f$  est continue sur  $[-1, 1[$ .
- c. Quelle est la limite de  $f$  en  $1^-$  ?

-----

a. La fonction  $f$  est la somme d'une série entière de rayon de convergence 1 (évident, par exemple par la règle de d'Alembert), donc  $] -1, 1[ \subset D_f \subset [-1, 1]$ . Or, la série diverge pour  $x = 1$  (série de Riemann d'exposant  $\frac{1}{2}$ ), et elle converge pour  $x = -1$  (série alternée vérifiant les hypothèses du théorème spécial, puisque la suite  $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$  est décroissante et tend vers 0). Ainsi,  $D_f = [-1, 1[$ .

b. D'après le cours sur les séries entières, la fonction somme  $f$  est continue sur l'intervalle de convergence  $] -1, 1[$ , il reste donc à prouver la continuité (à droite) au point  $-1$ . Pour cela, montrons en fait la continuité de  $f$  sur le segment  $[-1, 0]$ . Si on pose  $u_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{n}}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour  $x \in [-1, 0]$ , on peut écrire  $u_n(x) = (-1)^n \frac{|x|^n}{\sqrt{n}}$ , et la suite  $\left(\frac{|x|^n}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante et tend vers zéro. Le théorème spécial permet donc d'affirmer que le reste  $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$  est majoré, en valeur absolue, par le premier terme négligé, i.e.  $|r_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ . La dernière majoration est "uniforme" et permet d'écrire que  $\|r_n\|_{\infty, [-1, 0]} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . On a donc prouvé la convergence uniforme, sur  $[-1, 0]$ , de la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} u_n$ . Comme chaque fonction  $u_n$  est continue sur  $[-1, 0]$ , la fonction somme  $f$  l'est aussi par théorème, ce qui permet de conclure.

c. La fonction  $f$  est croissante sur  $[0, 1[$  (comme somme de fonctions croissantes). D'après le théorème de la limite monotone, elle admet donc une limite au point 1 dans  $\bar{\mathbb{R}}$ .

Si cette limite était finie, disons  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = l \in \mathbb{R}_+^*$ , on aurait alors, par croissance de  $f$ ,

$\forall x \in [0, 1[ \quad f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}} \leq l$ . Comme on travaille sur une série à termes positifs, toute somme partielle est majorée par la somme globale, donc cela impliquerait

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in [0, 1[ \quad \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{\sqrt{k}} \leq l .$$

En fixant  $n$ , on pourrait faire tendre  $x$  vers 1 dans cette inégalité, soit  $\forall n \in \mathbb{N}^* \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq l$ .

Mézalor, la série à termes positifs  $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ , dont les sommes partielles seraient majorées, serait convergente, ce qui n'est pas. On a obtenu une contradiction.

On conclut que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ .

---

**15.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -\infty, 1[$  par :

- $f(x) = \frac{\operatorname{Arctan} \sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}$  pour  $x < 0$  ;
- $f(0) = 1$  ;
- $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \left( \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \right)$  pour  $x > 0$ .

Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -\infty, 1[$ .

---

La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -\infty, 0[$  et sur  $] 0, 1[$  comme composée et quotient de fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , le seul problème est en 0. Mais on va montrer que  $f$  est développable en série entière sur  $] -1, 1[$ , ce qui réglera le problème. En effet,

- si  $x \in ] -1, 1[$ , on connaît le développement  $\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$  ; on en déduit que

$$\forall x \in ] -1, 0[ \quad f(x) = \frac{\operatorname{Arctan}(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{-x})^{2n}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}.$$

- si  $x \in ] -1, 1[$ , on a  $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ , donc

$$\begin{aligned} \forall x \in ] 0, 1[ \quad f(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \left[ \ln(1 + \sqrt{x}) - \ln(1 - \sqrt{x}) \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \left[ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\sqrt{x})^n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^n}{n} \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2p+1}}{2p+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}. \end{aligned}$$

Finalement,  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$  pour tout  $x \in ] -1, 1[$  : la fonction  $f$ , développable en série entière sur  $] -1, 1[$ , est donc de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur cet intervalle.

---

**16.** Pour  $n$  entier naturel, on pose  $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un carré} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ ,

$$b_n = \text{Card}\{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid p^2 + q^2 = n\} \quad \text{et} \quad c_n = \text{Card}\{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid p^2 + q^2 \leq n\}.$$

On admet par ailleurs que  $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

Pour  $x \in ]-1, 1[$ , on pose  $A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ,  $B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$  et  $C(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ .

- a. Donner une autre expression de  $A(x)$ . Par une méthode de comparaison série-intégrale, donner un équivalent de  $A(x)$  lorsque  $x \rightarrow 1^-$ .
  - b. Exprimer  $B(x)$  et  $C(x)$  à l'aide de  $A(x)$ , et en donner des équivalents lorsque  $x \rightarrow 1^-$ .
- 

- a. On a  $A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$ . On voit que le rayon de convergence de cette série entière est 1 en appliquant la règle de d'Alembert avec  $u_n(x) = x^{n^2}$ . Pour tout  $x \in ]0, 1[$ , la fonction  $f_x : t \mapsto x^{t^2} = e^{t^2 \ln(x)} = e^{-t^2 |\ln(x)|}$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ . Par une classique comparaison série-intégrale, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_n^{n+1} f_x(t) dt \leq f_x(n) \leq \int_{n-1}^n f_x(t) dt,$$

l'inégalité de gauche étant aussi vraie pour  $n = 0$ . En sommant pour  $n$  de 0 à l'infini (*mais pas au-delà !*), et en isolant dans la majoration le terme pour  $n = 0$ , on obtient l'encadrement (*les séries et intégrales généralisées apparaissant dans ce calcul sont convergentes, le lecteur s'en persuadera si nécessaire*):

$$\forall x \in ]0, 1[ \quad I(x) \leq A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_x(n) \leq 1 + I(x),$$

en posant

$$I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2 |\ln(x)|} dt = \frac{1}{\sqrt{|\ln(x)|}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2 \sqrt{|\ln(x)|}}.$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow 1^-} I(x) = +\infty$ , le terme constant 1 est négligeable, on en déduit l'équivalent

$$A(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2 \sqrt{|\ln(x)|}} \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2 \sqrt{1-x}}.$$

- b. On a  $b_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} = \sum_{p+q=n} a_p a_q$ . En effet, pour dénombrer les couples d'entiers naturels  $(p, q)$  vérifiant  $p^2 + q^2 = n$ , on compte combien il y a d'entiers  $k$  dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$  tels que  $k$  et  $n - k$  soient tous les deux des carrés. On reconnaît alors un “carré de Cauchy”. Le cours indique que la série entière  $\sum b_n x^n$  a un rayon de convergence au moins égal à 1

(mais comme il existe des entiers  $n$  aussi grands que l'on veut pour lesquels  $b_n \geq 1$ , la suite  $(b_n)$  ne tend pas vers 0, donc le rayon de convergence est aussi au plus égal à 1, donc finalement il vaut 1). On a donc, pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,  $B(x) = A(x)^2$ . Donc

$$B(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{\pi}{4(1-x)}.$$

Enfin,  $c_n = \sum_{k=0}^n b_k = \sum_{p+q=n} 1 \times b_q$ . On reconnaît encore un produit de Cauchy, de deux séries entières de rayon de convergence 1, donc la série entière  $\sum c_n x^n$  a un rayon de convergence au moins égal à 1 d'après le cours (et comme  $c_n \geq b_n \geq 0$ , par comparaison ce rayon de convergence vaut encore 1 nécessairement), et

$$\forall x \in ]-1, 1[ \quad C(x) = \left( \sum_{p=0}^{+\infty} x^p \right) \left( \sum_{q=0}^{+\infty} b_q x^q \right) = \frac{B(x)}{1-x} = \frac{A(x)^2}{1-x}.$$

Donc  $C(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{\pi}{4(1-x)^2}$ .

**17.** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique, non nulle, et  $N$ -périodique avec  $N \in \mathbb{N}^*$ .

a. Quel est le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  ?

b. Montrer que la fonction somme de cette série entière est une fonction rationnelle.

a. La suite  $(a_n)$  ne tend pas vers zéro: en effet, il y a au moins un coefficient non nul  $a_{n_0}$ , et on a alors  $a_{n_0+kN} = a_{n_0}$  pour tout  $k$  entier naturel. Donc la série  $\sum a_n$  diverge grossièrement, et cela entraîne  $R \leq 1$ .

D'autre part la suite  $(a_n)$  est périodique, donc bornée, et cela entraîne  $R \geq 1$ : en effet, si  $|a_n| \leq M$ , le rayon de convergence  $R$  est au moins égal à celui de la série géométrique  $\sum Mx^n$ , qui vaut 1.

Finalement,  $R = 1$ .

b. Pour  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < 1$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n &= \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n + \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{n+N} + \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{n+2N} + \dots \\ &= \left( \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n \right) \left( 1 + z^N + z^{2N} + \dots \right) \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n}{1 - z^N}, \end{aligned}$$

et la somme est une fonction rationnelle (quotient de deux fonctions polynomiales).

---



---

Développement en série entière.

18. Soit la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$ .

- Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$ , et que l'on peut écrire, sur  $\mathbb{R}^*$ ,  $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)f(x)$ , où  $P_n$  est une fonction polynomiale.
  - En déduire que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et que  $f^{(n)}(0) = 0$  pour tout entier naturel  $n$ .
  - La fonction  $f$  est-elle développable en série entière au voisinage de zéro ?
- 

a. La fonction  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_-^*$  et  $\mathbb{R}_+^*$  comme composée de fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

Montrons que, sur  $\mathbb{R}^*$ ,  $f^{(n)}(x)$  est de la forme demandée par récurrence sur  $n$ .

La propriété est vraie pour  $n = 0$  avec  $P_0 = 1$ .

Supposons que, pour  $n$  donné,  $f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ . Alors

$$f^{(n+1)}(x) = \left[ -\frac{1}{x^2} P'_n\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3} P_n\left(\frac{1}{x}\right) \right] \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

donc, en posant  $P_{n+1}(X) = -X^2 P'_n(X) + 2X^3 P_n(X)$ , nous avons

$$f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

et  $P_{n+1}$  est une fonction polynomiale, ce qui achève la démonstration.

Plus précisément  $\deg(P_{n+1}) = \deg(P_n) + 3$  et  $\deg(P_0) = 0$  donc, pour tout  $n$ ,  $\deg(P_n) = 3n$ . De plus, si  $a_n$  est le coefficient dominant de  $P_n$ , nous avons  $a_{n+1} = 2a_n$  et  $a_0 = 1$  donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = 2^n$ . Enfin en écrivant

$$P_n(x) = e^{x^2} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

et en remarquant que,  $f$  étant paire,  $f^{(n)}$  a la même parité que  $n$ , nous voyons que  $P_n$  a la même parité que  $n$ .

- Le problème se situe en 0. Commençons par montrer que pour tout polynôme  $P$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} P\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

Il suffit de montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$ . Or, en posant  $t = \frac{1}{x^2}$  nous avons effectivement (on utilise ensuite la parité) :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{n}{2}} e^{-t} = 0.$$

On en déduit donc que, pour tout  $n$  entier naturel, on a  $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = 0$ .

Montrons alors par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f$  est de classe  $C^n$  sur  $\mathbb{R}$ . La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  car  $\lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$ . De plus, elle est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  et, d'après ce qui précède,  $\lim_0 f' = 0$  donc (théorème “limite de la dérivée”)  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  avec  $f'(0) = \lim_0 f' = 0$ . La propriété est donc vraie pour  $n = 1$ .

Supposons la propriété vraie pour  $n$  fixé et montrons-la pour  $n + 1$ .

D'après l'hypothèse de récurrence  $f^{(n)}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  ; comme elle est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  et que  $\lim_0 f^{(n+1)} = \lim_0 (f^{(n)})' = 0$ , alors  $f^{(n)}$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  avec  $(f^{(n)})'(0) = 0$ , c'est-à-dire  $f$  est de classe  $C^{n+1}$  sur  $\mathbb{R}$  avec  $f^{(n+1)}(0) = 0$ , ce qui achève la preuve.

La fonction  $f$  est donc de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et  $f^{(n)}(0) = 0$  pour tout  $n$ .

- c. La série de Taylor de  $f$  en zéro est  $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n \geq 0} 0$  et le seul point en lequel  $f$  s'annule est 0, donc  $f$  n'est développable en série entière dans aucun intervalle  $] -r, r[$  avec  $r > 0$ .
- 

**19.** Pour tout  $x$  réel, on pose  $g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k(1-ikx)}$ .

- a. Montrer que la fonction  $g$  est définie, et de classe  $C^\infty$ , sur  $\mathbb{R}$ .  
 b. Montrer que, pour tout  $p$  entier naturel, on a  $|g^{(p)}(0)| \geq p^{2p} e^{-p}$ .  
 c. En déduire que la série de Taylor de  $g$  a un rayon de convergence nul.

a. Posons  $g_k(x) = e^{-k(1-ikx)} = e^{-k} e^{ik^2 x}$  pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Les fonctions  $g_k$  sont de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  avec  $g_k^{(p)}(x) = (ik^2)^p e^{-k} e^{ik^2 x}$ , on a donc  $|g_k^{(p)}(x)| = k^{2p} e^{-k}$  (indépendant de  $x$ ), donc  $\|g_k^{(p)}\|_\infty = k^{2p} e^{-k}$ . C'est le terme général d'une série convergente puisque, par croissances comparées,  $k^2 k^{2p} e^{-k} = k^{2p+2} e^{-k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ .

On a prouvé la convergence normale sur  $\mathbb{R}$  de toutes les séries dérivées  $\sum_{k \geq 0} g_k^{(p)}$ . Le théorème de dérivation des sommes de séries de fonctions s'applique donc, on en déduit que  $g$  est d'abord définie sur  $\mathbb{R}$  (puisque cela marche aussi pour  $p = 0$ ), puis de classe  $C^\infty$  avec

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad g^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k^{(p)}(x) = i^p \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p} e^{-k} e^{ik^2 x}.$$

- b. En particulier,  $g^{(p)}(0) = i^p \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p} e^{-k}$  et, les termes de cette dernière somme étant tous positifs,

$$|g^{(p)}(0)| = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p} e^{-k} \right| = \sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p} e^{-k} \geq p^{2p} e^{-p}.$$

c. On a donc  $\left| \frac{g^{(p)}(0)}{p!} \right| \geq \frac{p^{2p} e^{-p}}{p!}$ . Posons  $a_p = \frac{p^{2p} e^{-p}}{p!}$ . Alors, après simplifications, pour  $x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\left| \frac{a_{p+1}x^{p+1}}{a_p x^p} \right| = \frac{1}{e} \left( 1 + \frac{1}{p} \right)^{2p} (p+1) |x| \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} e p |x| \underset{p \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Par la règle de d'Alembert, la série entière  $\sum_{p \geq 0} a_p x^p$  ne converge donc que pour  $x = 0$ , autrement dit son rayon de convergence est nul. Par comparaison, la série de Taylor de  $g$ , à savoir  $\sum_{p \geq 0} \frac{g^{(p)}(0)}{p!} x^p$  a aussi un rayon de convergence nul. La fonction  $g$ , qui est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , n'est donc développable en série entière sur aucun intervalle  $] -r, r[$  avec  $r > 0$ .

**20.** Montrer que la fonction  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  est développable en série entière sur l'intervalle  $] -1, 1[$ .

En déduire la relation

$$\forall x \in ] -1, 1[ \quad \text{Arcsin } x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Cette dernière relation reste-t-elle vraie pour  $x = -1$  et  $x = 1$  ?

-----  
En utilisant le DSE de  $(1+x)^\alpha$ , valable dans  $] -1, 1[$ , on obtient

$$\forall x \in ] -1, 1[ \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}(-x^2) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\left( -\frac{1}{2} \right) \left( -\frac{3}{2} \right) \cdots \left( -\frac{2n-1}{2} \right)}{n!} (-x^2)^n,$$

soit  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n}$ . Le rayon de convergence de cette série entière est 1, on peut le vérifier par d'Alembert. Par intégration terme à terme, pour  $x$  appartenant à l'intervalle de convergence  $] -1, 1[$ , on a

$$\text{Arcsin } x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (*) .$$

Posons  $a_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)}$ . La formule de Stirling donne  $u_n \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi} n^{\frac{3}{2}}}$ , donc la

série  $\sum a_n$  converge. Cela garantit la convergence normale sur  $[-1, 1]$  de la série entière  $\sum a_n x^{2n+1}$  et donc la continuité de sa somme sur cet intervalle  $[-1, 1]$ . La fonction arcsinus étant elle aussi continue sur  $[-1, 1]$ , la relation d'égalité  $(*)$ , prouvée sur  $] -1, 1[$  ouvert, reste valable sur  $[-1, 1]$  fermé. On en déduit ainsi la relation

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} .$$

---

**21.** Pour  $x$  réel non nul, on pose  $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt$ .

- a. Montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en 0.
- b. Montrer que la fonction  $f$ , ainsi prolongée, est développable en série entière sur  $\mathbb{R}$  et expliciter son développement.

- a. Une solution parmi beaucoup d'autres. Pour  $t \in [0, \pi]$ , on a  $1 - t \leq \cos(t) \leq 1$ . En effet, la deuxième inégalité est bien connue, et  $1 - \cos(t) = \int_0^t \sin(u) du \geq 0$  (l'intégrande est positif), ce qui donne la première. Donc, pour  $x \in ]0, \pi]$ , on a

$$\ln(2) - x = \int_x^{2x} \frac{1-t}{t} dt \leq f(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t} = \ln(2).$$

Le théorème d'encadrement donne  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \ln(2)$ . Enfin, la fonction  $f$  est paire puisque

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{\cos(t)}{t} dt = \int_x^{2x} \frac{\cos(-u)}{-u} (-du) = \int_x^{2x} \frac{\cos(u)}{u} du = f(x).$$

On a donc aussi  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \ln(2)$ . On prolonge donc  $f$  par continuité en 0 en posant  $f(0) = \ln(2)$ .

- b. Pour tout  $x$  réel, on a  $f(x) - \ln(2) = \int_x^{2x} g(t) dt$ , en posant  $g(t) = \frac{\cos(t) - 1}{t}$  pour  $t$  non nul et  $g(0) = 0$ . Cette fonction  $g$  est développable en série entière sur  $\mathbb{R}$  puisque

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \quad \frac{\cos(t) - 1}{t} = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n-1}}{(2n)!},$$

et finalement  $g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n-1}}{(2n)!}$  pour tout  $t$  réel. Les primitives de  $g$  s'obtiennent alors par primitivation terme à terme sur l'intervalle de convergence qui est  $\mathbb{R}$ . En notant par exemple  $G$  la primitive de  $g$  qui s'annule en 0, on a

$$G(x) = \int_0^x g(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n) \times (2n)!}.$$

$$\text{Enfin, } f(x) = \ln(2) + G(2x) - G(x) = \ln(2) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (4^n - 1) x^{2n}}{(2n) \times (2n)!}.$$


---

**22.** On fixe  $a \in [0, 1[$ . Pour  $x$  réel, on pose  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sh}(a^n x)$ .

- a. Montrer que la fonction  $S$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .
- b. Trouver une relation entre  $S(ax)$  et  $S(x)$ .

**c\***. En déduire que  $S$  est développable en série entière sur  $\mathbb{R}$  et expliciter ce développement.

**23.a.** Former de deux façons le développement en série entière de

$$f : x \mapsto e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt .$$

**b.** En déduire la relation

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} \binom{2n}{n} = \frac{4^n}{2n+1} .$$

**a. •** Pour tout  $t$  réel, on a  $e^{t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{n!}$ . On sait que l'on peut primitiver terme à terme la fonction somme d'une série entière sur son intervalle de convergence (ici, l'ensemble  $\mathbb{R}$ ), on en déduit que l'expression de la primitive s'annulant en zéro est

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_0^x e^{t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n! (2n+1)} .$$

Par ailleurs, pour tout réel  $x$ , on a aussi  $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ . Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, on déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{p+q=n} \frac{(-1)^p}{p! q! (2q+1)} x^{2p} x^{2q+1} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)! k! (2k+1)} \right) x^{2n+1} .$$

• Par ailleurs, on peut avoir la curiosité de dériver  $f$ , on obtient alors  $f'(x) = -2x f(x) + 1$ , donc  $f$  est solution de l'équation différentielle (E):  $y' + 2xy = 1$ . Recherchons alors les solu-

tions développables en série entière de cette équation (E). Si on pose  $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  sur

un intervalle  $] -r, r[$  avec  $r > 0$  (que l'on déterminera a posteriori), alors  $y' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ ,

soit  $y' = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ , et  $xy = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n$ . En réinjectant dans (E), on a

$$a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1) a_{n+1} + 2a_{n-1}) x^n = 1 ,$$

ce qui impose (par unicité du DSE):  $a_1 = 1$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_{n+1} = -\frac{2}{n+1} a_{n-1}$ . La fonction  $f$  vérifie de plus la condition initiale  $y(0) = 0$  qui donne  $a_0 = 0$  si on suppose

$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  sur  $] -r, r [$ . Tout ceci permet d'obtenir les  $a_n$  de proche en proche, à savoir  
 $a_{2p} = 0$  et  $a_{2p+1} = \frac{(-1)^p 2^p}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2p+1)} = \frac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!}$  pour tout  $p$  entier naturel.

On fait maintenant une petite synthèse: si l'on considère les coefficients  $a_n$  obtenus ci-dessus, on pose  $u_p(x) = a_{2p+1} x^{2p+1}$ , on a alors (pour  $x \neq 0$ ),

$$\left| \frac{u_{p+1}(x)}{u_p(x)} \right| = \frac{4}{(2p+1)(2p+3)} x^2 \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0,$$

on en déduit que la série entière  $\sum_{p \geq 0} u_p(x) = \sum_{p \geq 0} a_{2p+1} x^{2p+1}$  converge pour tout  $x$  réel, elle

a donc un rayon de convergence infini, et si on pose  $s(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} x^{2p+1}$  pour  $x \in \mathbb{R}$ , la

fonction somme (d'après le calcul précédent) est solution du problème de Cauchy constitué de l'équation (E) et de la condition initiale  $y(0) = 0$ . Elle coïncide donc avec  $f$  qui est aussi solution de ce problème de Cauchy. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

b. Par unicité du développement en série entière, on peut identifier les coefficients obtenus par les deux méthodes, cela donne

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)! k! (2k+1)} = \frac{(-1)^n 4^n n!}{(2n+1)!},$$

soit encore

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \frac{(2n)!}{n! (n-k)! k!} = \frac{4^n}{2n+1},$$

soit encore... la relation demandée.

---

### Autres exercices.

24\*. Soit  $\sum a_n x^n$  une série entière de rayon de convergence infini. On suppose que cette série entière converge uniformément sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que les  $a_n$  sont nuls à partir d'un certain rang.

-----  
Posons  $u_n(x) = a_n x^n$ , soit  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  la somme partielle d'ordre  $n$  de la série entière, c'est une fonction polynomiale. Si on suppose que la série entière converge uniformément sur  $\mathbb{R}$ , alors la suite de fonctions  $(P_n)$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction  $f$  (qui est la somme de la série entière), mézalor  $u_n = P_n - P_{n-1}$  converge uniformément vers 0 puisque

$$\|u_n\|_\infty = \|(f - P_{n-1}) - (f - P_n)\|_\infty \leq \|f - P_{n-1}\|_\infty + \|f - P_n\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Donc, pour  $n$  assez grand ( $n \geq N$ ),  $\|u_n\|_\infty < +\infty$ , i.e.  $u_n$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ , donc  $u_n$  est constante (car c'est une fonction polynomiale), donc  $u_n$  est nulle puisqu'elle est de la forme  $x \mapsto a_n x^n$  avec  $n \geq 1$ , donc  $a_n = 0$ . La fonction somme  $f = P_N$  est donc une fonction polynomiale.

**25.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^\infty$ . On suppose qu'il existe un réel positif  $M$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |f^{(n)}(x)| \leq M.$$

Avec l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que  $f$  est développable en série entière sur  $\mathbb{R}$ .

La formule de Taylor avec reste intégral donne

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \int_0^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt.$$

Pour  $x > 0$ , on majore la valeur absolue:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \int_0^x \frac{M (x-t)^n}{n!} dt = \left[ -\frac{M (x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_{t=0}^{t=x} = M \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Pour  $x < 0$ , le lecteur courageux adaptera. On obtient dans tous les cas

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

et le majorant, pour  $x$  réel fixé, tend vers zéro lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Cela prouve que, pour tout  $x$  réel, la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$  converge et a pour somme  $f(x)$ . Donc  $f$  est, sur  $\mathbb{R}$  tout entier, somme de sa série de Taylor en zéro ; autrement dit,  $f$  est développable en série entière sur  $\mathbb{R}$ .

**26.** Calculer  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$ .

On pourra utiliser le développement en série entière de  $\arctan x$ .

La convergence (absolue) de la série proposée est immédiate.

On observe que  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} dx$ . On se demande alors s'il est possible d'intervertir série et intégrale. **Attention!** La série entière  $\sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$  a pour rayon de

**convergence 1.** Le cours sur les séries entières permet juste d'affirmer que l'on peut intervertir série et intégrale sur tout segment inclus dans l'intervalle de convergence  $] -1, 1[$ , ce qui n'est pas le cas du segment  $[0, 1]$ . Il faut donc faire les choses à la main (*on peut aussi essayer avec les pieds, mais c'est un peu plus compliqué*).

Si l'on pose  $u_n(x) = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$  pour  $x \in [0, 1]$  et  $n \in \mathbb{N}$ , alors les fonctions  $u_n$  sont continues sur  $[0, 1]$ , et il y a convergence uniforme sur cet intervalle de la série de fonctions  $\sum u_n$ . En effet, pour  $x \in [0, 1]$  fixé, la suite  $\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et tend vers 0, le théorème spécial des séries alternées permet donc d'affirmer que le reste  $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$  vérifie  $|r_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)|$ , donc  $|r_n(x)| \leq \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3}$ , donc  $\|r_n\|_{\infty, [0, 1]} \leq \frac{1}{2n+3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ . L'interversion est donc justifiée, cela donne

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} dx = \int_0^1 \operatorname{Arctan}(x) dx \\ &= \left[ x \operatorname{Arctan}(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \left[ x \operatorname{Arctan}(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}. \end{aligned}$$

27. Soit  $\sum_{n \geq 0} u_n$  une série à termes réels, convergente, de somme  $S$ . On note  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$  sa somme partielle d'ordre  $n$ , et  $R_n = S - S_n$  le reste d'ordre  $n$ . Enfin, pour tout réel  $x$ , on pose  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} x^n$ .
- a. Montrer que l'on peut écrire  $S - e^{-x} f(x) = e^{-x} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{R_n}{n!} x^n \right)$ .
  - b. En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} f(x) = S$ .

28. Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ . On pose  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  pour  $|z| < R$ .
- a. Soit  $r$  tel que  $0 < r < R$ . Montrer que  $\forall p \in \mathbb{N} \quad a_p r^p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-ipt} dt$ .  
En déduire que  $|a_p| \leq \frac{M(r)}{r^p}$ , où  $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ .
  - b. *Application.* Soit  $f$  la somme d'une série entière de rayon de convergence infini. On suppose que  $f$  est bornée sur  $\mathbb{C}$ . Montrer que  $f$  est constante.

- - - - -

a. Pour  $p \in \mathbb{N}$  et  $0 < r < R$ , on a  $\int_0^{2\pi} f(r e^{it}) e^{-ipt} dt = \int_0^{2\pi} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{i(n-p)t} \right) dt$ .

Or, la série numérique à termes positifs  $\sum_{n \geq 0} |a_n| r^n$  converge puisque  $0 < r < R$ , ce qui entraîne la convergence normale sur le segment  $[0, 2\pi]$  de la série de fonctions  $\sum_{n \geq 0} u_n$ , avec  $u_n(t) = a_n r^n e^{i(n-p)t}$ ; on peut donc intégrer terme à terme, ce qui donne

$$\int_0^{2\pi} f(r e^{it}) e^{-ipt} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t} dt = 2\pi a_p r^p.$$

En effet, si  $k$  est un entier relatif, on a  $\int_0^{2\pi} e^{ikt} dt = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . On a ainsi obtenu la **formule intégrale de Cauchy** qui permet de déterminer les coefficients  $a_p$  d'une série entière si l'on connaît l'expression de la fonction somme sur le cercle de centre  $O$  et de rayon, avec  $r \in ]0, R[$  donné :  $a_p = \frac{1}{2\pi r^p} \int_0^{2\pi} f(r e^{it}) e^{-ipt} dt$ . Comme

$$\left| \int_0^{2\pi} f(r e^{it}) e^{-ipt} dt \right| \leq \int_0^{2\pi} |f(r e^{it})| dt \leq 2\pi M(r),$$

on déduit une majoration des coefficients :  $|a_p| \leq \frac{M(r)}{r^p}$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$  et  $r \in ]0, R[$ .

b. On suppose  $R = +\infty$  et  $\forall z \in \mathbb{C} \quad |f(z)| \leq M$ , alors  $|a_p| \leq \frac{M}{r^p}$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$  et tout  $r \in \mathbb{R}_+^*$ . Fixons  $p$  entier naturel non nul ; en passant à la limite ( $r \rightarrow +\infty$ ) dans l'inégalité ci-dessus, on obtient  $|a_p| \leq 0$ . Donc  $a_p = 0$  pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , et  $f(z) = a_0$  :  $f$  est une fonction constante.

29. Pour  $\alpha$  réel et  $n$  entier naturel non nul, on pose  $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ ,

par convention  $\binom{\alpha}{0} = 1$ . Prouver la **relation de Chu-Vandermonde**:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}.$$

On sait que, pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , on a

$$(1+x)^a = \sum_{p=0}^{+\infty} \binom{a}{p} x^p \quad \text{et} \quad (1+x)^b = \sum_{q=0}^{+\infty} \binom{b}{q} x^q.$$

Puis, toujours dans  $] -1, 1[$ , on a  $(1+x)^{a+b} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{a+b}{n} x^n$ , mézôssi (par produit de Cauchy):

$$(1+x)^{a+b} = (1+x)^a(1+x)^b = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ \sum_{p+q=n} \binom{a}{p} \binom{b}{q} \right] x^n.$$

Par identification des coefficients (légitime car il y a unicité du développement en série entière), on a donc

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{p+q=n} \binom{a}{p} \binom{b}{q} = \sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k}.$$


---



---

### Exercices avec Python.

**30.** La suite de Fibonacci ( $a_n$ ) est définie par

$$a_0 = 0 \quad ; \quad a_1 = 1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

- a. Écrire une fonction retournant  $a_n$ , prenant  $n$  comme argument.
  - b. On pose  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  pour tout  $x$  tel que cette série entière converge. Représenter la somme partielle d'indice 20 de cette série entière dans l'intervalle  $[0 ; 0,6]$ .
  - c. Montrer que, pour tout  $x \in ] -R, R[$ , où  $R$  est le rayon de convergence, on a  $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ .
  - d. Représenter sur le même graphique la fonction  $x \mapsto \frac{x}{1-x-x^2}$  sur l'intervalle  $[0 ; 0,6]$ .
- 

**31.** Pour tout  $n$  entier naturel, on pose  $D_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid 2p + 3q = n\}$ , et  $d_n = \text{Card}(D_n)$ .

- a. Écrire une fonction Python prenant comme argument un entier naturel  $n$  et retournant la liste des éléments de l'ensemble  $D_n$ .
- b. Avec Python, comparer  $d_n$  et  $d_{n+6}$  pour  $n \in \llbracket 0, 184 \rrbracket$ . Faire une conjecture.  
Pour  $x \in ] -1, 1[$ , on pose  $f(x) = \frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)}$ .
- c. Montrer que  $f$  est développable en série entière sur  $] -1, 1[$ .
- d. On note  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$  ce développement en série entière. Écrire une fonction en langage Python qui calcule  $c_n$ , prenant  $n$  comme argument. Calculer  $c_n$  pour  $n \in \llbracket 0, 199 \rrbracket$ .
- e. Vérifier expérimentalement la relation  $c_n = d_n$ , puis la démontrer.
- f. En considérant la fonction  $g : x \mapsto (1-x^6) f(x) - \frac{1}{1-x}$ , prouver la conjecture émise à la question b.
- g. Représenter sur un même graphique, sur l'intervalle  $[0 ; 0,95]$ , la fonction  $f$  et la somme partielle d'indice 20 de la série entière  $\sum c_n x^n$ .

a. cf. script.

b. cf. script. On conjecture que  $d_{n+6} = d_n + 1$  pour tout  $n$ .

c. Les fonctions  $u : x \mapsto \frac{1}{1-x^2} = (1-x^2)^{-1}$  et  $v : x \mapsto \frac{1}{1-x^3} = (1-x^3)^{-1}$  sont DSE sur  $] -1, 1[$ . Par produit de Cauchy, il en est donc de même de  $f = uv$ . Pour le calcul, précisons:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad \text{avec } a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \pmod{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

De même,

$$v(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{3k} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n, \quad \text{avec } b_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \pmod{3} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Enfin, pour  $|x| < 1$ ,  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$  avec  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ .

d. cf. script.

e. cf. script. On a  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ , mais  $a_k$  et  $b_{n-k}$  prenant leurs valeurs dans  $\{0, 1\}$ , il en est de même de leur produit, qui vaut alors 1 si et seulement si  $a_k = 1$  et  $b_{n-k} = 1$ , donc si et seulement s'il existe  $p$  et  $q$  entiers naturels tels que  $k = 2p$  et  $n - k = 3q$ . Donc  $c_n$  est égal au nombre d'entiers  $k$  dans  $[0, n]$  tels que  $2 \mid k$  et  $3 \mid n - k$ , c'est aussi le nombre de couples  $(p, q)$  dans  $[0, n]^2$ , donc dans  $\mathbb{N}^2$ , tels que  $2p + 3q = n$ . Ainsi  $c_n = d_n$ .

f. D'une part, on calcule, pour  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ ,

$$g(x) = \frac{1-x^6}{(1-x^2)(1-x^3)} - \frac{1}{1-x} = \frac{(1-x^6) - (1+x)(1-x^3)}{(1-x^2)(1-x^3)} = \frac{-x^6 + x^4 + x^3 - x}{x^5 - x^3 - x^2 + 1} = -x.$$

D'autre part, sur  $] -1, 1[$ , on a

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - x^6 f(x) - \frac{1}{1-x} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{n+6} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n - \sum_{n=6}^{+\infty} c_{n-6} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\ &= \sum_{n=0}^5 (c_n - 1) x^n + \sum_{n=6}^{+\infty} (c_n - c_{n-6} - 1) x^n, \end{aligned}$$

et ceci doit aussi être égal à  $-x = 0 x^0 - 1 x^1 + \sum_{n=2}^{+\infty} 0 x^n$  sur  $] -1, 1[$ . Par unicité du développement en série entière, on peut identifier les coefficients, ce qui donne notamment  $c_n - c_{n-6} - 1 = 0$  pour tout  $n \geq 6$ , soit  $c_{n+6} = c_n + 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**g.** *cf.* script.