

DEVOIR MAISON de MATHÉMATIQUES numéro 4
COMMENTAIRES
PSI2 2025-2026

Ce problème, dont les différentes parties étaient assez indépendantes, explorait la notion de sous-espace stable par un endomorphisme, et notamment le lien avec les sous-espaces propres. Je rappelle à ce sujet qu'**une droite vectorielle est stable par un endomorphisme si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre**, c'est un résultat du cours.

Parmi les défauts souvent rencontrés, je note chez certain(e)s un manque de maîtrise du vocabulaire de l'algèbre linéaire, d'où parfois des phrases dénuées de sens, ou des expressions étonnantes ("un vecteur est stable" alors que vous voulez parler de la droite engendrée par ce vecteur, par exemple).

Enfin, certaines questions méritaient, après éventuellement quelques calculs, **de se terminer par une conclusion clairement énoncée**, et c'est loin d'être le cas sur toutes les copies, je crois qu'un effort doit être fait par toutes et tous en ce sens!

- 1.b.** Quelques réponses pas forcément fausses, mais étonnamment maladroites, comme

$$\text{Im}(v) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

pour dire que $\text{Im}(v) = \mathbb{R}^2$, c'est-à-dire que v est surjectif.

L'énoncé définit v comme endomorphisme du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, la recherche de valeurs propres non réelles n'a donc pas de sens, la bonne réponse est: $\text{Sp}(v) = \text{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \emptyset$.

- 2.** On demande les "éléments propres", il faut donc préciser les valeurs propres mézôssi les sous-espaces propres ce qui n'est pas toujours fait.
- 3.c.** Une question un peu délicate reposant sur le fait que deux formes linéaires non nulles ont le même noyau si et seulement si elles sont proportionnelles, ou encore que deux équations linéaires définissent le même hyperplan si et seulement si on a proportionnalité des coefficients. Certains ont parlé d'orthogonalité ou de vecteur normal à un hyperplan: si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, effectivement en munissant $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique, un hyperplan dont une équation cartésienne est $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ admet pour vecteur normal $\vec{\nu} = (a_1, \dots, a_n)$, c'est donc une bonne idée même si les espaces euclidiens n'ont pas encore été revus cette année.
- 4.a.** Cette question n'a pas toujours été traitée et, lorsqu'elle l'a été, elle se termine rarement par un bilan clair! Comme je l'ai dit en introduction, si vous faites des calculs (recherche des sous-espaces propres de M^T par exemple), il convient de terminer la question en donnant clairement une énumération de tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ qui sont stables par f . Idem pour **4.b.**
- 5.** Question assez bien traitée en général, même si les réponses ne sont pas toujours suffisamment justifiées (pourquoi l'endomorphisme v de la question **1.b.** n'admet-il pas d'autre sous-espace stable que $\{0\}$ et $E = \mathbb{R}^2$ par exemple ? C'était le moment de rappeler qu'une droite vectorielle est stable par un endomorphisme si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre).
- 6.c.** Cela repose sur un exercice classique: si un endomorphisme f de E est tel que tout vecteur (non nul) est vecteur propre, alors f est une homothétie.
- 7.a.** Quelques essais de constructions de bases "adaptées à F " mais cela ne marche pas vraiment. Je rappelle l'énoncé que je trouve le plus commode du **théorème de la base incomplète**: "si $\mathcal{L}$ est une famille libre dans E de dimension finie, si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice, il est possible de compléter $\mathcal{L}$ en une base de E en lui adjoignant des vecteurs de $\mathcal{G}$, autrement dit il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{L} \cup \mathcal{G}$ ".

8. Question pas toujours traitée. La partie un peu délicate est d'expliquer convenablement comment construire une "base adaptée à un drapeau". Pour employer des termes compréhensibles par le commun des mortels, partant de sous-espaces $F_0, \dots, F_n$ comme proposés dans l'énoncé, comment construire une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que, pour tout k , $(e_1, \dots, e_k)$ soit une base de F_k . Ceci était à développer.
- 10.b. Quelques erreurs d'argumentation: la famille $\mathcal{B}_x$ est **par définition** génératrice de V_x , mais **on ne connaît pas a priori la dimension de V_x** . C'est seulement après avoir montré que la famille $\mathcal{B}_x$ est libre (*mais c'est un résultat du cours!*) que l'on peut affirmer que $\text{Card}(\mathcal{B}_x) = \dim(V_x) = r$.