COLLES de MATHÉMATIQUES **PSI2 2025-2026**

Semaine 11 : du 08/12 au 12/12

Séries entières

Tout le chapitre, *cf.* programme précédent

Espaces vectoriels normés

Notion de norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Distance associée à une norme. Boules ouvertes, boules fermées, sphères. Parties bornées. Parties convexes. Toute boule est convexe.

Norme associée à un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.

Exemple des normes N_1, N_2, N_∞ sur $\mathbb{K}^n$ ou bien sur $\mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$.

Notion de suite convergente dans un espace vectoriel normé. Unicité de la limite. Opérations algébriques sur les suites convergentes.

Notion de normes équivalentes. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes (*admis*), la convergence d'une suite peut alors s'étudier coordonnée par coordonnée dans une base. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k = L$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} B_k = L'$ alors $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k B_k = LL'$.

Démonstrations de cours ou proches du cours

- Caractère $\mathcal{C}^\infty$ de la somme d'une série entière sur $]-R,R[$, relation $f^{(k)}(0) = k!a_k$, unicité du développement en série entière.
- Développement en série entière de $(1+x)^\alpha$.
- Toute boule d'un e.v.n. est convexe.
- Comparaison des trois normes usuelles N_1, N_2 et N_∞ sur $\mathbb{R}^n$.
- En dimension finie, en admettant l'équivalence des normes, la convergence d'une suite peut s'étudier coordonnée par coordonnée dans une base.
- En admettant l'existence d'une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$, montrer que, si $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k = L$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} B_k = L'$ alors $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k B_k = LL'$.