Normes, suites convergentes.

1. Soient N et N' deux normes sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

a. On note B et B' les boules unités fermées, i.e.

$$B=\{x\in E\mid N(x)\leq 1\}\qquad\text{et}\qquad B'=\{x\in E\mid N'(x)\leq 1\}\ .$$

Montrer que $B=B'\Longrightarrow N=N'$.

b. Même question avec les boules unités ouvertes.

- -

a. Si $x=0_E$, on a évidemment $N(x)=N'(x)=0$.

Sinon, notons que, si λ est un réel positif, alors

$$\lambda x\in\overline{B}\iff\lambda\,N(x)\leq 1\iff\lambda\leq\frac{1}{N(x)}\ ,$$

donc $\{\lambda\in\mathbb{R}_+\mid\lambda x\in\overline{B}\}=\left[0,\dfrac{1}{N(x)}\right]$, et $\dfrac{1}{N(x)}=\max\{\lambda\in\mathbb{R}_+\mid\lambda x\in\overline{B}\}$. Il est maintenant clair que, si $\overline{B}=\overline{B}'$, alors $\dfrac{1}{N(x)}=\dfrac{1}{N'(x)}$, donc $N(x)=N'(x)$.

b. Si $x\in E$ est non nul, on a maintenant $\{\lambda\in\mathbb{R}_+\mid\lambda x\in B\}=\left[0,\dfrac{1}{N(x)}\right[$, on en déduit que $\dfrac{1}{N(x)}=\sup\{\lambda\in\mathbb{R}_+\mid\lambda x\in B\}$ et on conclut de la même façon.

---

2. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $N(x,y)=\max\limits_{t\in[0,1]}|x+ty|$.

a. Montrer que l'application N est une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

b. Soit B la boule unité fermée de centre 0_E pour la norme N. Montrer que $B=\bigcap\limits_{t\in[0,1]}B_t$, avec $B_t=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid|x+ty|\leq 1\}$. Montrer que $B=B_0\cap B_1$. Dessiner B.

- -

a. L'application N est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Si $N(x,y)=0$, alors $|x+ty|=0$ pour tout $t\in[0,1]$, donc en particulier pour $t=0$ ce qui donne $x=0$, puis pour $t=1$ ce qui donne alors $y=0$, donc $(x,y)=(0,0)$, on a ainsi vérifié l'axiome de séparation.

Si λ est un réel, on a

$$N\big(\lambda(x,y)\big)=N(\lambda x,\lambda y)=\max_{t\in[0,1]}|\lambda x+t\lambda y|=\max_{t\in[0,1]}\big(|\lambda|\,|x+ty|\big)=|\lambda|\max_{t\in[0,1]}|x+ty|=|\lambda|N(x,y)\ ,$$

on a ainsi montré l'homogénéité. Enfin,

$$\begin{aligned}N\big((x,y)+(x',y')\big)&=N(x+x',y+y')\\&=\max_{t\in[0,1]}\big|x+x'+t(y+y')\big|\\&=\max_{t\in[0,1]}\big|(x+ty)+(x'+ty')\big|\\&\leq\max_{t\in[0,1]}\big(|x+ty|+|x'+ty'|\big)\\&\leq\max_{t\in[0,1]}|x+ty|+\max_{t\in[0,1]}|x'+ty'|\ =\ N(x,y)+N(x',y')\ ,\end{aligned}$$

ce qui prouve l'inégalité triangulaire.

b. On a

$$\begin{aligned}(x,y)\in B \quad &\Longleftrightarrow \quad \max_{t\in[0,1]}|x+ty|\le 1\\ &\Longleftrightarrow \quad \forall t\in[0,1]\quad |x+ty|\le 1\\ &\Longleftrightarrow \quad \forall t\in[0,1]\quad (x,y)\in B_t\\ &\Longleftrightarrow \quad (x,y)\in \bigcap_{t\in[0,1]} B_t\ ,\end{aligned}$$

ce qui montre la première égalité d'ensembles. Il est alors clair que $B=\bigcap_{t\in[0,1]} B_t\subset B_0\cap B_1$.

Par ailleurs, si $(x,y)\in B_0\ \cap\ B_1$, alors $|x|\le 1$, $|x+y|\le 1$, donc pour tout $t\in[0,1]$,

$$|x+ty|=\big|(1-t)x+t(x+y)\big|\le(1-t)|x|+t|x+y|\le(1-t)+t=1\ ,$$

donc $(x,y)\in\bigcap_{t\in[0,1]} B_t=B$, ce qui prouve que $B=B_0\ \cap\ B_1$.

Remarque. En s'inspirant du calcul ci-dessus, on aurait pu prouver dès le départ que, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a $N(x,y)=\max\big\{|x|,|x+y|\big\}$, ce qui rendait l'exercice plus facile!

Il est facile de construire graphiquement B_0 (bande verticale définie par $-1\le x\le 1$) et B_1 (bande oblique définie par $-1\le x+y\le 1$) et d'en déduire B, qui est un parallélogramme plein.

---

3. Pour toute matrice A appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|A\|=\max_{1\le i\le n}\Big(\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\Big)$.

a. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Montrer que l'on a $\|AB\|\le\|A\|\,\|B\|$ pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c. Pour tout $X=\begin{pmatrix}x_1 & \cdots & x_n\end{pmatrix}^\top\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $\|X\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$. Prouver la relation $\|AX\|_\infty\le\|A\|\,\|X\|_\infty$.

d. Montrer que toute valeur propre réelle λ de la matrice A vérifie $|\lambda|\le\|A\|$.

- -

a. On a bien sûr $\|A\|\ge 0$, et si $\|A\|=0$, alors $\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|$ est nul pour tout i, ce qui entraîne que $a_{i,j}$ est nul pour tout i et pour tout j (une somme de réels positifs est nulle **ssi** chaque terme est nul), on a ainsi prouvé l'axiome de séparation. L'homogénéité est une simple formalité. Pour l'inégalité triangulaire, on utilise d'abord l'inégalité triangulaire sur la valeur absolue dans $\mathbb{R}$: $|a_{i,j}+b_{i,j}|\le|a_{i,j}|+|b_{i,j}|$, d'où , pour tout $i\in[\![1,n]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}+b_{i,j}|\le\sum_{j=1}^{n}\big(|a_{i,j}|+|b_{i,j}|\big)=\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|+\sum_{j=1}^{n}|b_{i,j}|\le\|A\|+\|B\|\ .$$

En passant au max, on obtient l'inégalité $\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|$.

b. Posons $C = (c_{i,j}) = AB$, alors $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$ puis, pour tout i,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} |c_{i,j}| &= \sum_{j=1}^{n} \Big| \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \Big| \le \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k} b_{k,j}| \Big) \\
&\le \sum_{k=1}^{n} \Big(|a_{i,k}| \sum_{j=1}^{n} |b_{k,j}| \Big) \le \sum_{k=1}^{n} \big(|a_{i,k}| \, \|B\| \big) \\
&\le \|B\| \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \le \|A\| \, \|B\| \, .
\end{aligned}$$

Certaines des inégalités ci-dessus sont systématiquement des égalités, mais il m'a semblé plus clair de le présenter ainsi.

La majoration obtenue ci-dessus étant vraie pour tout i, elle reste vraie pour le maximum, donc $\|C\| = \|AB\| \le \|A\| \, \|B\|$.

c. Posons $AX = Y = (y_1 \quad \cdots \quad y_n)^T$, alors $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$ pour tout i, donc

$$|y_i| \le \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \, |x_j| \le \Big(\max_{1 \le j \le n} |x_j| \Big) \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \le \|A\| \, \|X\|_\infty \, .$$

Cette inégalité étant vraie pour tout i, on a prouvé que $\|Y\|_\infty = \|AX\|_\infty \le \|A\| \, \|X\|_\infty$.

d. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A, il existe $X \in \mathbb{R}^n$ **non nul** tel que $AX = \lambda X$. On a alors $\|AX\|_\infty = \|\lambda X\|_\infty = |\lambda| \, \|X\|_\infty \le \|A\| \, \|X\|_\infty$, d'où $|\lambda| \le \|A\|$ puisque $\|X\|_\infty$ est un réel strictement positif.

---

4. Soit $E = \mathcal{C}^1\big([0,1], \mathbb{R}\big)$. Pour $f \in E$, on pose $N(f) = \left(f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}}$.

a. Montrer que N est une norme sur E.

b. Soit $f \in E$. Montrer que

$$\forall x \in [0,1] \qquad f(x)^2 \le 2\, f(0)^2 + 2 \left(\int_0^x |f'(t)| \, \mathrm{d}t \right)^2 .$$

c. En déduire que, pour tout $f \in E$, on a $\|f\|_\infty \le \sqrt{2}\, N(f)$.

- -

a. Pour $f \in E$ et $g \in E$, on pose $(f|g) = f(0)\, g(0) + \int_0^1 f'(t)\, g'(t) \, \mathrm{d}t$, et on vérifie qu'il s'agit d'un produit scalaire (*on détaillera notamment le caractère défini positif*). Comme $N(f) = \sqrt{(f|f)}$, on déduit que N est une norme sur E.

b. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, on a $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) \, \mathrm{d}t$ pour tout $x \in [0,1]$.Or, quels que soient les réels a et b, on a l'inégalité "classique" $(a+b)^2 \le 2(a^2 + b^2)$ (preuve facile, résulte de $(a-b)^2 \ge 0$), on en déduit que

$$f(x)^2 = \Big(f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\Big)^2 \leq 2\,f(0)^2 + 2\,\Big(\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\Big)^2 .$$

Continuons à majorer : comme

$$\Big|\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\Big| \leq \int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t ,$$

on a finalement $f(x)^2 \leq 2\,f(0)^2 + 2\,\left(\int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)^2$.

c. Continuons à majorer, d'abord avec $\displaystyle\int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t$ car l'intégrande est positif, puis en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq \left(\int_0^1 |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)\,\left(\int_0^1 1^2\,\mathrm{d}t\right) = \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t .$$

On a finalement, pour tout $x \in [0,1]$,

$$f(x)^2 \leq 2\,f(0)^2 + 2\,\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t = 2\,N(f)^2 ,$$

soit $\|f\|_\infty^2 \leq 2\,N(f)^2$, ou encore $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}\,N(f)$.

5.a. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \big|P^{(k)}(k)\big|$. Montrer que N est une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

b. Soient $n+1$ réels $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$ tels que $\forall k \in [\![0,n]\!] \quad P^{(k)}(k) = a_k$. Montrer que cela détermine le polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

- -

a. D'abord $N(P)$ est une somme finie: si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on peut écrire $N(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \big|P^{(k)}(k)\big|$.

On a clairement $N(P) \geq 0$ et, si P est un polynôme non nul, notons n son degré et a_n son coefficient dominant ($a_n \neq 0$), alors $P^{(n)} = n!\,a_n$ (polynôme constant), donc $N(P) \geq \big|P^{(n)}(n)\big| = n!\,|a_n| > 0$, ce qui prouve l'axiome de séparation.

L'homogénéité $N(\lambda P) = |\lambda|\,N(P)$ est immédiate.

Enfin, si $n \geq \max\big\{\deg(P), \deg(Q)\big\}$, alors

$$N(P+Q) = \sum_{k=0}^{n} \big|P^{(k)}(k) + Q^{(k)}(k)\big| \leq \sum_{k=0}^{n} \big|P^{(k)}(k)\big| + \sum_{k=0}^{n} \big|Q^{(k)}(k)\big| = N(P) + N(Q) ,$$

et on a prouvé l'inégalité triangulaire.

b. L'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \qquad \varphi(P) = \Big(P(0), P'(1), P''(2), \cdots, P^{(n)}(n)\Big)$$

est linéaire et injective: *en effet, on a vu en* **a.** *que, si P est non nul de degré d, alors $P^{(d)}(d) \neq 0$, donc $\varphi(P) \neq 0$*, elle est donc bijective (isomorphisme) puisque $\dim\Big(\mathbb{R}_n[X]\Big) = \dim\Big(\mathbb{R}^{n+1}\Big)$. Tout $(n+1)$-uplet $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ de réels admet donc un unique antécédent par φ dans $\mathbb{R}_n[X]$, ce qu'il fallait démontrer.

---

6. Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P \in E$ et $a \in [0,1]$, on pose

$$N_a(P) = \big|P(a)\big| + \int_0^1 \big|P'(t)\big|\,\mathrm{d}t\;.$$

a. Montrer que, pour tout $a \in [0,1]$, N_a est une norme sur E.

b. Soit $(a,b) \in [0,1]^2$. Montrer que les normes N_a et N_b sur E sont équivalentes.

- -

a. Il est clair que $N_a(P) \geq 0$ pour tout $P \in E$.

Si $N_a(P) = 0$, alors $P(a) = 0$ et $\displaystyle\int_0^1 \big|P'(t)\big|\,\mathrm{d}t = 0$ (deux termes positifs dont la somme est nulle). Comme $|P'|$ est une fonction continue positive et d'intégrale nulle sur $[0,1]$, on a alors $P' = 0$ sur $[0,1]$ d'après le théorème de stricte positivité. Donc P est constante sur $[0,1]$, elle y est nulle puisque $P(a) = 0$. Enfin, le polynôme P ayant une infinité de racines, c'est le polynôme nul. On a ainsi prouvé l'axiome de séparation.

L'axiome d'homogénéité $N_a(\lambda P) = |\lambda|\,N_a(P)$ est immédiat.

Enfin, l'inégalité triangulaire est facile:

$$\begin{aligned} N_a(P+Q) &= \big|P(a)+Q(a)\big| + \int_0^1 \big|P'(t)+Q'(t)\big|\,\mathrm{d}t \\ &\leq \big|P(a)\big| + \big|Q(a)\big| + \int_0^1 \big|P'(t)\big|\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \big|Q'(t)\big|\,\mathrm{d}t \;=\; N_a(P) + N_a(Q)\;. \end{aligned}$$

b. Soient a et b dans $[0,1]$. Alors, pour tout $P \in E$, on a $N_b(P) = N_a(P) + \big|P(b)\big| - \big|P(a)\big|$. Or, par le "côté obscur" de l'inégalité triangulaire, puis par l'inégalité triangulaire intégrale,

$$\big|P(b)\big| - \big|P(a)\big| \leq \big|P(b) - P(a)\big| = \left|\int_a^b P'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{\min\{a,b\}}^{\max\{a,b\}} \big|P'(t)\big|\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \big|P'(t)\big|\,\mathrm{d}t\;.$$

On en déduit que

$$N_b(P) \leq N_a(P) + \int_0^1 \big|P'(t)\big|\,\mathrm{d}t \leq 2\,N_a(P)\;.$$

Par symétrie des rôles de a et b, on déduit que

$$\forall P \in E \qquad N_b(P) \leq 2\,N_a(P) \leq 4\,N_b(P)\;,$$

les normes N_a et N_b sur E sont donc équivalentes.

---

7. Soient $f_1, \cdots, f_n$ des applications continues de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$. À quelle condition l'application $N : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$N : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto \|x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n\|_\infty$$

définit-elle une norme sur $\mathbb{K}^n$?

- -

Une condition nécessaire est que la famille de fonctions $(f_1, \cdots, f_n)$ soit libre dans $\mathcal{C}\big([0,1], \mathbb{R}\big)$. En effet, si ce n'est pas le cas, il existe des coefficients non tous nuls λ_1, $\cdots$, λ_n tels que $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$, et alors $N(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = 0$, ce qui nie l'axiome de séparation.

Cette condition est aussi suffisante. En effet, si elle est satisfaite, alors N est bien une application de $\mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$, on a

$$\begin{aligned} N(x_1, \cdots, x_n) = 0 \quad &\iff \quad \|x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n\|_\infty = 0 \iff x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n = 0 \\ &\iff \quad (x_1, \cdots, x_n) = (0, \cdots, 0) \end{aligned}$$

par liberté de la famille. De plus, si $\lambda \in \mathbb{K}$, $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $y = (y_1, \cdots, y_n)$, alors

$$N(\lambda x) = \big\|\lambda(x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n)\big\|_\infty = |\lambda| \, \|x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n\|_\infty = |\lambda| \, N(x) \ ,$$

et

$$\begin{aligned} N(x+y) \quad &= \quad \big\|(x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n) + (y_1 f_1 + \cdots + y_n f_n)\big\| \\ &\leq \quad \|x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n\|_\infty + \|y_1 f_1 + \cdots + y_n f_n\|_\infty \ = \ N(x) + N(y) \ , \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\| \cdot \|_\infty$ est une norme (que l'on connaît, dite "de la convergence uniforme") sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}\big([0,1], \mathbb{R}\big)$.

---

8. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Soit u un endomorphisme de E tel que

$$\forall x \in E \qquad \|u(x)\| \leq \|x\| \ .$$

Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E)$.

- -

Posons $F = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ et $G = \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E)$, on sait que $\dim E = \dim F + \dim G$ (théorème du rang). Pour démontrer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires, il suffit donc de montrer qu'ils sont en somme directe, c'est-à-dire que $F \cap G = \{0_E\}$.

Soit donc $x \in F \cap G$, on a alors $u(x) = x$ et il existe $y \in E$ tel que $x = u(y) - y$. On a alors $u(y) = x + y$, puis

$$u^2(y) = u\big(u(y)\big) = u(x) + u(y) = x + (x + y) = 2x + y \ ,$$

puis, par une récurrence immédiate, $u^n(y) = n\,x + y$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De l'hypothèse de l'énoncé (l'application u est 1-lipschitzienne), on déduit que $\|u^n(y)\| \leq \|y\|$: la suite $\big(\|u^n(y)\|\big)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Mais, si on avait $x \neq 0_E$, le "côté obscur" de l'inégalité triangulaire donnerait

$$\|u^n(y)\| = \|nx + y\| \geq \big|\|nx\| - \|y\|\big| \geq n\,\|x\| - \|y\| \quad \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \quad +\infty \ ,$$

ce qui est contradictoire. On a donc nécessairement $x = 0_E$, ce qui termine l'exercice.