

UN PROBLÈME sur les SÉRIES ENTIÈRES (CORRIGÉ)

PARTIE A

A.1. La formule de Taylor avec reste intégral donne

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n h^{(n+1)}(t)}{n!} dt = \int_0^1 \frac{(x-xu)^n h^{(n+1)}(xu)}{n!} x du = x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n h^{(n+1)}(xu)}{n!} du$$

(on a effectué le changement de variable linéaire $t = xu$).

A.2. On a $h^{(n+2)} \geq 0$ sur l'intervalle $[0, a]$, donc la fonction $h^{(n+1)}$ est croissante sur cet intervalle et, pour tout $u \in [0, 1]$, on a alors $h^{(n+1)}(xu) \leq h^{(n+1)}(yu)$. On en déduit

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} y^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n h^{(n+1)}(xu)}{n!} du \\ &\leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} y^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n h^{(n+1)}(yu)}{n!} du = \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y). \end{aligned}$$

Par ailleurs, de $h^{(n+1)} \geq 0$ sur $[0, x]$, on déduit que $R_n(x) \geq 0$. Enfin, $R_n(y) \leq h(y)$ puisque $h(y) - R_n(y) = \sum_{k=0}^n \frac{h^{(k)}(0)}{k!} y^k$, somme dont tous les termes sont positifs.

A.3. Fixons $x \in]0, a[$; choisissons un y tel que $x < y < a$. La suite de terme général $\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} h(y)$ est une suite géométrique de raison $\frac{x}{y} \in]0, 1[$, donc elle converge vers 0. Le théorème d'encadrement permet alors d'affirmer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$, ce qui montre que f est somme de sa série de Taylor en tout point de l'intervalle $]0, a[$ (pour $x = 0$, c'est évident).

PARTIE B

B.1.a. Démonstration par récurrence sur n de l'existence du polynôme P_n :

- pour $n = 0$, c'est vrai avec $P_0(X) = X$ (de degré 1) ;
- si c'est vrai au rang n , alors $g^{(n+1)}(x) = \left(g^{(n)}\right)'(x) = (1 + \tan^2 x) P_n'(\tan x) = P_{n+1}(\tan x)$, avec $P_{n+1}(X) = (1 + X^2) P_n'(X)$, donc $\deg(P_{n+1}) = 1 + \deg(P_n)$.

Ainsi, l'existence du polynôme P_n pour tout n est démontrée, avec $\deg(P_n) = n + 1$. L'unicité est immédiate : si un autre polynôme Q_n était solution du problème, on aurait $P_n(\tan x) = Q_n(\tan x)$ pour tout $x \in I$, donc $P_n(t) = Q_n(t)$ pour tout réel t , d'où égalité des polynômes P_n et Q_n puisque les fonctions polynomiales associées coïncident.

- b.** On montre par récurrence sur n que les coefficients du polynôme P_n appartiennent à $\mathbb{N}$: c'est vrai pour $n = 0$ ($P_0 = X$) et l'hérédité résulte immédiatement de la relation de récurrence $P_{n+1} = (1 + X^2) P_n'$.

B.2.a. Les coefficients du polynôme P_n étant positifs, et la fonction tangente prenant des valeurs positives sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad g^{(n)}(x) = P_n(\tan x) \geq 0,$$

c'est-à-dire les hypothèses de la **PARTIE A**, donc la fonction $g = \tan$ est somme de sa série de Taylor sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et sa série de Taylor est bien celle proposée par l'énoncé (car, g étant impaire, on a $g^{(2n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Les fonctions S et g sont impaires et coïncident sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc sont égales sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

- b.** De la question **a.**, on déduit que le rayon de convergence de la série entière S est au moins égal à $\frac{\pi}{2}$; par ailleurs, la fonction somme S , définie et coïncidant avec g sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, a

pour limite à gauche $+\infty$ en $\frac{\pi}{2}$, ce qui prouve que l'on ne peut pas la prolonger en une fonction continue sur un intervalle $] -R, R[$ avec $R > \frac{\pi}{2}$, donc le rayon de convergence de la série de Taylor S de la fonction tangente est exactement $\frac{\pi}{2}$.

PARTIE C

C.1. $\mathcal{S}$ contient la suite nulle et, si $s = (s_n)$ et $s' = (s'_n)$ sont deux suites appartenant à $\mathcal{S}$, si α et β sont deux réels, prenons des réels strictement positifs M, M', K, K' tels que $|s_n| \leq M K^n$ et $|s'_n| \leq M' K'^n$, on vérifie que $|\alpha s_n + \beta s'_n| \leq M'' K''^n$, avec $M'' = |\alpha|M + |\beta|M'$ et $K'' = \max\{K, K'\}$. Donc $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

C.2.a. Supposons $a \in \mathcal{S}$ et $b \in \mathcal{S}$, avec $|a_n| \leq M K^n$ et $|b_n| \leq M' K'^n$. Posons $c = a \otimes b$, c'est-à-dire $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$. On a alors, en posant $C = \max\{K, K'\}$ et en utilisant l'inégalité $n+1 \leq 2^n$:

$$|c_n| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| |b_{n-k}| \leq M M' \sum_{k=0}^n K^k K'^{n-k} \leq M M' \sum_{k=0}^n C^n = (n+1) M M' C^n \leq M M' (2C)^n ,$$

donc la suite $c = a \otimes b$ appartient à $\mathcal{S}$. L'ensemble $\mathcal{S}$ est donc stable pour la loi $\otimes$.

b. On cherche une suite (e_n) telle que, pour toute suite (a_n) appartenant à $\mathcal{S}$, on ait $a \otimes e = a$ (la loi $\otimes$ est clairement commutative), soit $a_n = \sum_{k=0}^n a_k e_{n-k}$, et on voit qu'il suffit de poser $e_0 = 1$ et $e_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, autrement dit $e_n = \delta_{0,n}$ (c'est bien une suite appartenant à $\mathcal{S}$).

*On peut montrer que cette loi $\otimes$, qui correspond au produit de Cauchy des séries et qui porte aussi le nom de **convolution**, est commutative, associative et distributive par rapport à l'addition, et que $(\lambda a) \otimes b = a \otimes (\lambda b) = \lambda (a \otimes b)$.*

C.3.a. La recherche d'une suite $b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $a \otimes b = e$ conduit au système

$$b_0 = 1 ; \quad b_1 + a_1 b_0 = 0 ; \quad b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0 ; \quad \dots$$

Ce "système triangulaire infini" admet une solution unique, puisqu'il permet de calculer les coefficients b_n de proche en proche, à savoir $b_0 = 1$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les coefficients

$$b_k \quad (0 \leq k \leq n-1) \text{ étant supposés déterminés, } b_n = - \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} b_k.$$

b. Par récurrence forte sur n : c'est vrai pour $n = 0$ ($|b_0| = 1 \leq (1+M)^0 K^0 = 1$) et, si la majoration $|b_k| \leq (1+M)^k K^k$ est vraie pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, alors

$$|b_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_{n-k}| |b_k| \leq \sum_{k=0}^{n-1} M K^{n-k} (1+M)^k K^k = M K^n \sum_{k=0}^{n-1} (1+M)^k = M K^n \frac{(1+M)^n - 1}{M} ,$$

ce que l'on peut majorer par $K^n (1+M)^n$, ce qui achève la preuve par récurrence.

On a ainsi prouvé que $b \in \mathcal{S}$.

C.4.a. Si $s \in \mathcal{S}$, on a une majoration de la forme $|s_n| \leq M K^n$, donc la série entière $\sum s_n x^n$ a un rayon de convergence non nul (au moins égal à $\frac{1}{K}$ par comparaison).

b. Inversement, si la série entière $\sum s_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$, alors en prenant r tel que $0 < r < R$, la série numérique $\sum |s_n| r^n$ converge, donc son terme général est borné : il existe $M > 0$ tel que $|s_n| r^n \leq M$ pour tout n , soit $|s_n| \leq M \left(\frac{1}{r}\right)^n$ et $s \in \mathcal{S}$.

C.5.a. Sur $] - R, R[$, on a $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$; la rayon de convergence de cette série entière étant non nul, la suite de ses coefficients $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{S}$ (question **C.4.b.** ci-dessus) ; comme $a_0 = 1$, de la question **C.3.**, on déduit l'existence d'une suite $b = (b_n)$, appartenant aussi à $\mathcal{S}$, telle que $a \otimes b = e$. De la question **C.4.a.**, on déduit enfin que la série entière $\sum b_n x^n$ a un rayon de convergence R' non nul, notons $g(x)$ sa somme sur l'intervalle $] - R', R'[$. En posant $R'' = \min\{R, R'\}$, le produit de Cauchy des deux séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ a un rayon de convergence au moins égal à R'' et sa somme vaut $h(x)g(x)$ sur $] - R'', R''[$; mais ce produit de Cauchy n'est autre que $\sum_{n=0}^{+\infty} e_n x^n = 1$.

Sur l'intervalle $] - R'', R''[$, on a donc $h(x)g(x) = 1$, soit $g(x) = \frac{1}{h(x)}$: la fonction $g = \frac{1}{h}$ est donc développable en série entière dans l'intervalle $] - R'', R''[$.

b. On peut appliquer le résultat du **a.** à la fonction cosinus : elle est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ avec $a_0 = \cos 0 = 1$. Donc la fonction $\frac{1}{\cos}$ est développable en série entière dans un certain intervalle $] - R, R[$ avec $R > 0$. La fonction sinus est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, donc la fonction produit $\frac{1}{\cos} \times \sin = \tan$ est développable en série entière au moins sur l'intervalle $] - R, R[$ (puisque, sur cet intervalle, son développement s'obtient en faisant le produit de Cauchy des deux développements précédents).