DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES numéro 4

PSI2 2025-2026 **Durée: 4 heures** **06/12/2025**

PROBLÈME 1

Soit E un ensemble non vide.

On appelle **partition** de E tout ensemble fini $\mathcal{U} = \{A_1, \cdots, A_k\}$ de parties de E tel que:

- chaque A_i, pour $i \in [\![1, k]\!]$, est une partie **non vide** de E ;
- les parties $A_1, \cdots, A_k$ sont **deux à deux disjointes**, c'est-à-dire que pour tout couple $(i, j) \in [\![1, k]\!]^2$ avec $i \neq j$, on a $A_i \cap A_j = \emptyset$.
- la réunion des A_i forme E tout entier: $E = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} A_i$.

Si $\mathcal{U}$ est une partition de E et si k est le nombre d'éléments de $\mathcal{U}$, on dit aussi que $\mathcal{U}$ est une **partition de E en k parties**.

PARTIE A. Nombre de partitions en k parties.

1. Soient k et n deux entiers strictement positifs. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de partitions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ en k parties.

Dans ce qui suit, pour tout couple (n, k) d'entiers strictement positifs, on note $S(n, k)$ le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ en k parties.

On pose de plus $S(0, 0) = 1$ et pour tout $(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $S(n, 0) = S(0, k) = 0$.

2. Exprimer $S(n, k)$ en fonction de n ou de k lorsque $k > n$, ainsi que lorsque $k = 1$.

3. Montrer que, pour k et n entiers naturels non nuls, on a

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + k\, S(n-1, k)\ .$$

On distinguera les partitions de $[\![1, n]\!]$ en k parties selon qu'elles contiennent ou non le singleton $\{n\}$.

4. Dans un tableau à double entrée, disposer les valeurs de $S(n, k)$ pour $(n, k) \in [\![0, 6]\!]^2$.

PARTIE B. Nombres de Bell.

Dans toute la suite, on pose pour tout n entier naturel, $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} S(n, k)$.

5. Montrer que, pour $n \geq 1$, B_n est le nombre total de partitions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$.

6. Prouver la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k\ .$$

On pourra dénombrer les partitions de l'ensemble $[\![1, n+1]\!]$ en commençant par choisir la partie qui contient l'élément $n+1$.

7. Montrer que la suite $\left(\dfrac{B_n}{n!}\right)_{n \geq 1}$ est majorée par 1.

8. Que peut-on en déduire pour le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} z^n$?

Pour $x \in \,]-R, R[\,$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$.

9. Montrer que, pour tout $x \in \,]-R, R[\,$, on a $f'(x) = e^x f(x)$.

10. En déduire une expression de $f(x)$ pour $x \in \,]-R, R[$.

PROBLÈME 2
ÉTUDE DES ENDOMORPHISMES CYCLIQUES

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Un endomorphisme f de E est dit **cyclique** s'il existe un vecteur x_0 de E tel que la famille $\mathcal{F} = \big(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0)\big)$ soit une base de E. Dans ce cas, un vecteur x_0 vérifiant la propriété ci-dessus est appelé **vecteur cyclique** de f.

1. Dans cette question, $E = \mathbb{R}^3$ et f est l'endomorphisme de E canoniquement représenté par la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & -2 & b \\ 1 & -6 & c \end{pmatrix}$, où a, b, c sont trois réels. On note e_1 le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. À quelle condition sur les réels a, b, c le vecteur e_1 est-il un vecteur cyclique pour l'endomorphisme f ?

2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme cyclique. Montrer que la famille $(\mathrm{id}_E, f, f^2, \cdots, f^{n-1})$ est libre dans l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$.

3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est cyclique si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme

$$C(a_0, \cdots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix},$$

où a_0, $\cdots$, a_{n-1} sont n scalaires. Une telle matrice s'appelle une **matrice-compagnon**.

4. Cas des endomorphismes diagonalisables.

Dans cette question, on se donne $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme supposé diagonalisable. On note $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de vecteurs propres de f, et on note λ_1, $\cdots$, λ_n les valeurs propres respectivement associées: on a ainsi $f(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

a. Soit u un vecteur de E que l'on décompose dans la base $\mathcal{B}$: $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$. Écrire la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ de la famille de vecteurs $\mathcal{F} = \big(u, f(u), f^2(u), \cdots, f^{n-1}(u)\big)$.

b. À quelle condition sur les coordonnées u_1, $\cdots$, u_n du vecteur u et sur les valeurs propres λ_1, $\cdots$, λ_n de f cette famille $\mathcal{F}$ est-elle une base de E ?

c. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme diagonalisable soit cyclique. Caractériser alors ses vecteurs cycliques.

5. Cas des endomorphismes nilpotents.

Dans cette question, on se donne $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme supposé nilpotent, i.e. il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0$.

a. Soit $x \in E$. Justifier l'existence d'un plus petit entier naturel p (dépendant a priori du vecteur x) tel que $f^p(x) = 0_E$. Montrer ensuite que la famille de vecteurs $\big(x, f(x), \cdots, f^{p-1}(x)\big)$ est libre.

b. En déduire que $f^n = 0$.

c. Montrer que f est cyclique si et seulement si $f^{n-1} \neq 0$. Par quelle matrice "simple" peut-on alors représenter f ?

6. Réduction des matrices-compagnons.

Soient n scalaires a_0, $\cdots$, a_{n-1}. La matrice $C(a_0, \cdots, a_{n-1})$ introduite à la question **3.** sera notée C pour simplifier.

a. Calculer le polynôme caractéristique χ_C de la matrice C. *Pour calculer $\chi_C(x)$ avec x scalaire, on pourra effectuer l'opération élémentaire* $L_1 \leftarrow L_1 + \sum_{i=2}^{n} x^{i-1} L_i$.

b. En considérant le rang de la matrice $C - \lambda I_n$ pour λ scalaire, montrer que les sous-espaces propres de la matrice C sont des droites vectorielles.

c. Soit le polynôme $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Énoncer une condition nécessaire et suffisante portant sur ce polynôme pour que la matrice C soit diagonalisable.

d. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(C)$. On sait alors que λ est aussi valeur propre de la matrice transposée $C^\top$. En écrivant le système $C^\top X = \lambda X$ avec $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, déterminer le sous-espace propre $E_\lambda(C^\top)$, c'est-à-dire en donner une base.

7. Commutant d'un endomorphisme cyclique.

On suppose dans cette question que $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme cyclique de E. On note $\mathcal{C}(f)$ son **commutant**, i.e.

$$\mathcal{C}(f) = \big\{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\big\} .$$

On note $\mathbb{K}[f]$ l'ensemble des polynômes de l'endomorphisme f, i.e.

$$\mathbb{K}[f] = \big\{g \in \mathcal{L}(E) \ \mid \ \exists P \in \mathbb{K}[X] \quad g = P(f)\big\} .$$

a. Vérifier (rapidement!) que $\mathcal{C}(f)$ et $\mathbb{K}[f]$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$.

b. Quelle inclusion évidente y a-t-il entre les ensembles $\mathcal{C}(f)$ et $\mathbb{K}[f]$? Justifier la réponse.

c. Soit $g \in \mathcal{C}(f)$. Soit $x_0 \in E$ un vecteur cyclique de f.

i) Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $g(x_0) = P(f)(x_0)$.

ii) Montrer que, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, on a $g\big(f^i(x_0)\big) = P(f)\big(f^i(x_0)\big)$.

iii) En déduire que $g = P(f)$.

d. Que peut-on dire finalement des ensembles $\mathcal{C}(f)$ et $\mathbb{K}[f]$?

e. Préciser la dimension et une base des espaces vectoriels $\mathcal{C}(f)$ et $\mathbb{K}[f]$.

8. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme cyclique. Montrer que les polynômes annulateurs de f sont exactement les multiples de son polynôme caractéristique χ_f. *On utilisera le théorème de Cayley-Hamilton et on posera une division euclidienne.*

9. Localisation des racines d'un polynôme.

Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice carrée d'ordre n, on pose $r_i = \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, puis on pose $N(A) = \max_{1 \leq i \leq n} r_i$.

Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on pose $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

a. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé. Montrer que

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \qquad \big|\lambda\, x_i\big| \leq r_i\, \|X\|_\infty\ .$$

b. En déduire que le spectre de A est inclus dans un disque fermé du plan complexe, de centre O et d'un rayon R que l'on précisera.

c. Soit $P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_1 X - a_0 \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré n. En considérant une matrice carrée dont P est le polynôme caractéristique, montrer que toutes les racines de P appartiennent au disque fermé de centre O et de rayon

$$R = \max\big\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|, \cdots, 1 + |a_{n-1}|\big\}\ .$$

d. Soient a, b, c, d quatre entiers naturels non nuls et deux à deux distincts. Montrer que l'équation d'inconnue n:

$$n^a + n^b = n^c + n^d$$

admet pour seules solutions dans $\mathbb{N}$ les nombres 0 et 1.