CORRIGÉ du D.S. de MATHÉMATIQUES numéro 4
PSI2 2025-2026

PROBLÈME 1

extrait d'un sujet Centrale-Supélec, filière PC, 2017

PARTIE A. Nombre de partitions en k parties.

1. Pour former une partition $\{A_1, \cdots, A_k\}$ de $[\![1, n]\!]$ en k parties, il faut associer à chaque entier de 1 à n le numéro de la partie dans laquelle il se trouve, il y a donc au plus k^n possibilités (nombre d'applications de $[\![1, n]\!]$ vers $[\![1, k]\!]$)... mais c'est une majoration grossière!

2. • Si $k > n$, alors $S(n, k) = 0$: en effet, les parties A_i, $1 \leq i \leq k$ d'une partition étant supposées non vides, chacune contient au moins un élément et, comme elles sont deux à deux disjointes, il y en a au plus n.

• On a $S(n, 1) = 1$ si $n > 0$: en effet, la seule partition de $[\![1, n]\!]$ en une seule partie est le singleton $\mathcal{U} = \big\{[\![1, n]\!]\big\}$. Par convention, $S(0, 1) = 0$.

3. Dénombrons les partitions de $[\![1, n]\!]$ en k parties.

- il y a celles qui contiennent le singleton $\{n\}$, elles sont au nombre de $S(n-1, k-1)$ puisqu'il reste alors à former une partition de l'ensemble $[\![1, n-1]\!]$ en $k-1$ parties ;
- pour les autres, l'élément n est dans une partie qui n'est pas un singleton. Pour construire une telle partition, on commence par construire une partition de l'ensemble $[\![1, n-1]\!]$ en k parties, il y a $S(n-1, k)$ possibilités, puis on associe l'élement n à l'une des parties (il y a donc k choix possibles) de cette partition préalablement construite. On obtient donc $k\, S(n-1, k)$ partitions de ce type.

Les deux possibilités énumérées ci-dessus s'excluant mutuellement, on déduit la relation

$$\forall (n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2 \qquad S(n, k) = S(n-1, k-1) + k\, S(n-1, k)\ .$$

Remarque. Les nombres $S(n, k)$ étant définis de manière conventionnelle lorsque $n = 0$ ou $k = 0$, il est prudent de s'assurer que la relation ci-dessus est encore valable lorsque l'un des entiers $n-1$ ou $k-1$ est nul, soit lorsque $n = 1$ ou $k = 1$. Le lecteur est invité à faire ces vérifications...

4. Présentons cela sous la forme d'une matrice $\big(S(n, k)\big)_{0 \leq n, k \leq 6} \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$, où n est l'indice de ligne et k l'indice de colonne, leur numérotation commençant à 0:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 15 & 25 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 31 & 90 & 65 & 15 & 1 \end{pmatrix}.$$

PARTIE B. Nombres de Bell.

5. C'est évident (dans la mesure où le terme pour $k = 0$ est nul).

6. Pour former une partition de $[\![1, n+1]\!]$, on commence par choisir la partie contenant l'élément $n+1$. On choisit donc une partie A de l'ensemble $[\![1, n]\!]$, de cardinal j avec $0 \leq j \leq n$ et on lui adjoint l'élément $n+1$. Cet entier j étant fixé, il y a $\displaystyle\binom{n}{j}$ façons de choisir la partie A.

On réalise ensuite une partition de l'ensemble $[\![1, n]\!] \setminus A$, qui est de cardinal $n - j$, et il y a B_{n-j} telles partitions. Comme l'entier j varie de 0 à n, on a prouvé la relation $B_{n+1} = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\, B_{n-j}$. On pose enfin $j = n - k$ et on obtient:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k}\, B_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, B_k\ .$$

7. Montrons par récurrence forte que, pour tout n entier naturel, on a $0 \leq B_n \leq n!$.

Pour $n = 0$, on a $B_0 = 1 = 0!$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que l'on ait $0 \leq B_k \leq k!$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Alors

$$0 \leq B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} \leq \sum_{k=0}^{n} n! = (n+1)! \;,$$

l'hérédité est donc prouvée (la dernière majoration est assez grossière).

8. Le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!} z^n$ est au moins égal à celui de la série entière (géométrique) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} z^n$, donc $R \geq 1$.

9. Dans l'intervalle de convergence $]-R, R[$, on peut dériver terme à terme, cela donne

$$\forall x \in\,]-R, R[\qquad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_n}{(n-1)!}\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{n!}\, x^n \;.$$

Or, $\displaystyle\frac{B_{n+1}}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{B_k}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} = \sum_{k+l=n} \frac{B_k}{k!} \frac{1}{l!}$. On reconnaît donc un produit de Cauchy. La série entière exponentielle $\displaystyle\sum_{l\geq 0} \frac{x^l}{l!}$ a un rayon de convergence infini, et la série entière $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{B_k}{k!} x^k$ a pour rayon de convergence R. Le cours indique que, pour tout x réel tel que $|x| < \min\{R, +\infty\} = R$, i.e. pour tout $x \in\,]-R, R[$, on a

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{n!}\, x^n = \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B_k}{k!} x^k\Big)\Big(\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{x^l}{l!}\Big) = e^x\, f(x) \;.$$

10. L'équation différentielle $y' = e^x\, y$ a pour solutions $y = C\, e^{e^x}$, où C est une constante. La fonction f est donc de cette forme. Enfin, $f(0) = \dfrac{B_0}{0!} = 1$, donc $C = e^{-1}$. Donc

$$\forall x \in\,]-R, R[\qquad f(x) = e^{e^x - 1} \;.$$

Remarque. On peut montrer, mais c'est plus difficile, qu'en fait $R = +\infty$.

PROBLÈME 2

1. En notant $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a $f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3$ (première colonne de la matrice A), puis

$$f^2(e_1) = f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = (a+3)e_1 + (b-1)e_2 + (c-5)e_3 \;.$$

Ensuite,

$$\det_{\mathcal{B}_0}\big(e_1, f(e_1), f^2(e_1)\big) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a+3 \\ 0 & 1 & b-1 \\ 0 & 1 & c-5 \end{vmatrix} = c - b - 4 \;.$$

Le déterminant (relativement à une base connue) d'une famille $\mathcal{F}$ de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ étant non nul si et seulement si cette famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on conclut que e_1 est un vecteur cyclique de f si et seulement si $c - b - 4 \neq 0$.

2. Soient $\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$ des scalaires tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k = 0$ (endomorphisme nul). Comme f est un endomorphisme cyclique, il existe pour f un vecteur cyclique x_0. En appliquant à ce vecteur la relation écrite ci-dessus, on obtient

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 f(x_0) + \cdots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x_0) = 0_E\ ,$$

ce qui entraîne que tous les scalaires α_i sont nuls puisque la famille $\mathcal{F} = \big(x_0, f(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0)\big)$ est une base de E. Ainsi, la famille $(\mathrm{id}_E, f, f^2, \cdots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.

3. • Supposons f cyclique, soit x_0 un vecteur cyclique de f, soit la base $\mathcal{B} = \big(x_0, f(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0)\big)$ de E. En notant $a_0, \cdots, a_{n-1}$ les coordonnées du vecteur $f^n(x_0)$ dans cette base, on obtient bien $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = C(a_0, \cdots, a_{n-1})$.

• Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, supposons qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E dans laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = C(a_0, \cdots, a_{n-1})$. On a alors $e_2 = f(e_1)$, $e_3 = f(e_2) = f^2(e_1)$, et ainsi de suite jusqu'à $e_n = f^{n-1}(e_1)$. Donc $\mathcal{B} = \big(e_1, f(e_1), \cdots, f^{n-1}(e_1)\big)$, ce qui montre que e_1 est un vecteur cyclique de f, donc f est un endomorphisme cyclique.

4. Cas des endomorphismes diagonalisables.

a. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $\displaystyle f^k(u) = \sum_{i=1}^{n} u_i\, f^k(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k u_i e_i$ puisque $f^k(e_i) = \lambda_i^k e_i$ pour tout i. Ainsi,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = M = \begin{pmatrix} u_1 & \lambda_1 u_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} u_1 \\ u_2 & \lambda_2 u_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} u_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n & \lambda_n u_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} u_n \end{pmatrix}.$$

b. La famille $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det(M)$ est non nul. Or, en observant que, pour tout i, le scalaire u_i est un facteur commun à tous les coefficients de la i-ème ligne de la matrice M, on a

$$\det(M) = \Big(\prod_{i=1}^{n} u_i\Big) \cdot \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \Big(\prod_{i=1}^{n} u_i\Big) \cdot V_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\ .$$

On reconnaît donc un déterminant de Vandermonde. Donc $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si aucun des deux facteurs $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} u_i$ et $V_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ n'est nul, donc si et seulement si on a la condition suivante:

"(aucune des coordonnées u_i du vecteur u n'est nulle) **et** (les valeurs propres λ_i sont deux à deux distinctes)".

c. L'endomorphisme f est cyclique si et seulement s'il admet au moins un vecteur cyclique. Une condition nécessaire est donc qu'il admette n valeurs propres distinctes. Et cette condition est aussi suffisante puisque, si elle est réalisée, ses vecteurs cycliques sont exactement les vecteurs dont aucune coordonnée n'est nulle dans une base constituée de vecteurs propres de f (et de tels vecteurs existent bien sûr).

5. Cas des endomorphismes nilpotents.

a. Comme f^k est l'endomorphisme nul, l'ensemble $A_x = \{i \in \mathbb{N}^* \mid f^i(x) = 0_E\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide (elle contient l'entier k), elle admet donc un minimum p.

Soient $\alpha_0, \cdots, \alpha_{p-1}$ des scalaires tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i f^i(x) = 0_E$. Si l'on suppose ces scalaires non tous nuls, on peut noter j le plus petit indice appartenant à $[\![0, p-1]\!]$ pour lequel $\alpha_j \neq 0$. On a alors $\displaystyle\sum_{i=j}^{p-1} \alpha_i f^i(x) = 0_E$. En appliquant f^{p-1-j}, on obtient, après translation d'indice, la relation $\displaystyle\sum_{l=p-1}^{2(p-1)-j} \alpha_{l-(p-1-j)} f^l(x) = 0_E$, soit $\alpha_j f^{p-1}(x) = 0_E$, ce qui est une absurdité puisque le scalaire α_j et le vecteur $f^{p-1}(x)$ sont tous deux non nuls. On en déduit que nécessairement tous les coefficients α_i sont nuls, et donc que la famille $\big(x, f(x), \cdots, f^{p-1}(x)\big)$est libre.

b. Pour tout x de E, l'entier p qui lui est associé dans la question **a.** est donc tel que $p \leq n$ (une famille libre de vecteurs de E est de cardinal au plus n), on a donc $f^n(x) = 0_E$. Donc f^n est l'endomorphisme nul.

c. Déjà, si $f^{n-1} = 0$, aucune famille de vecteurs de la forme $\big(x_0, f(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0)\big)$ ne peut être une base de E puisqu'elle contient le vecteur nul, l'endomorphisme f n'est donc pas cyclique dans ce cas.

Si $f^{n-1} \neq 0$, il existe alors un vecteur x_0 tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0_E$. Il résulte alors du **a.** que la famille $\mathcal{B} = \big(x_0, f(x_0), \cdots, f^{n-1}(x_0)\big)$ est libre, puis que c'est une base de E. Donc f est cyclique et

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = C(0, \cdots, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Réduction des matrices-compagnons.

a. Pour tout $x \in \mathbb{K}$,

$$\chi_C(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ -1 & x & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x-a_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & P(x) \\ -1 & x & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x-a_{n-1} \end{vmatrix},$$

en effectuant l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow L_1 + (xL_2 + \cdots + x^{n-1}L_n)$, avec

$$P(x) = -a_0 - a_1x - \cdots - a_{n-2}x^{n-2} + (x - a_{n-1})x^{n-1} = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \ .$$

Un développement par rapport à la dernière ligne conduit au résultat:

$$\chi_C(x) = (-1)^{1+n}\, P(x)\, (-1)^{n-1} = P(x)\ , \quad \text{soit} \quad \chi_C = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \ .$$

b. On a

$$C - \lambda I_n = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & -\lambda & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1}-\lambda \end{pmatrix}.$$

Les $n-1$ dernières lignes de cette matrice sont échelonnées, et sont donc linéairement indépendantes, on en déduit que le rang de $C - \lambda I_n$ vaut au moins $n-1$. Par le théorème du rang, on a donc pour tout scalaire λ,

$$\dim\big(E_\lambda(C)\big) = \dim\big(\operatorname{Ker}(C - \lambda I_n)\big) \leq 1 \ .$$

Si λ est valeur propre de C, le sous-espace propre $E_\lambda(C)$ est donc de dimension 1.

c. La matrice C est diagonalisable si et seulement si $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(C)} \dim\big(E_\lambda(C)\big) = n$. Les sous-espaces propres de C étant des droites, cela se produit si et seulement si C admet n valeurs propres distinctes, c'est-à-dire si et seulement si le polynôme P (qui est son polynôme caractéristique) admet n racines distinctes.

d. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(C)$, alors d'après **b.**, $\mathrm{rg}(C^\top - \lambda I_n) = \mathrm{rg}\,\big((C - \lambda I_n)^\top\big) = n-1$ puisqu'une matrice et sa transposée ont le même rang. Donc $\dim\big(E_\lambda(C^\top)\big) = 1$, ce qui montre que λ est aussi valeur propre de $C^\top$ et que le sous-espace propre est aussi une droite vectorielle.

Avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $C^\top X = \lambda X$ s'écrit

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_2 & = & \lambda x_1 \\ x_3 & = & \lambda x_2 \\ \cdots & & \cdots \\ x_n & = & \lambda x_{n-1} \\ a_0x_1+\cdots+a_{n-1}x_n & = & \lambda x_n \end{array}\right. , \quad \text{soit} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x_2 & = & \lambda x_1 \\ x_3 & = & \lambda^2 x_1 \\ \cdots & & \cdots \\ x_n & = & \lambda^{n-1} x_1 \\ (a_0+a_1\lambda+\cdots+a_{n-1}\lambda^{n-1})\,x_1 & = & \lambda^n x_1 \end{array}\right.$$

après substitutions. La dernière équation est du pur bidon, puisqu'elle s'écrit $\chi_C(\lambda)\cdot x_1=0$, et que $\chi_C(\lambda)$ est nul puisque λ est valeur propre de C. Un vecteur propre de $C^\top$ associé à la valeur propre λ est alors $X_\lambda=\begin{pmatrix}1\\ \lambda\\ \vdots\\ \lambda^{n-1}\end{pmatrix}$. Puisque $E_\lambda(C^\top)$ est une droite, on a donc $E_\lambda(C^\top)=\mathrm{Vect}(X_\lambda)$.

7. Commutant d'un endomorphisme cyclique.

a. Pures formalités!

b. Il est clair que $\mathbb{K}[f]\subset\mathcal{C}(f)$: tout polynôme de f commute avec f.

c. i) Comme x_0 est vecteur cyclique, la famille $\mathcal{B}=\big(x_0,f(x_0),\cdots,f^{n-1}(x_0)\big)$ est une base de E. Il existe donc des scalaires $\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1}$ tels que $g(x_0)=\alpha_0x+\alpha_1f(x_0)+\cdots+\alpha_{n-1}f^{n-1}(x_0)$, i.e. $g(x_0)=P(f)(x_0)$, en introduisant le polynôme $P=\alpha_0+\alpha_1X+\cdots+\alpha_{n-1}X^{n-1}$ de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

ii) L'endomorphisme g commute avec f par hypothèse, il est facile d'en déduire qu'il commute avec f^i pour tout i entier naturel. De plus, les endomorphismes $P(f)$ et f^i commutent aussi car ils sont tous deux des polynômes de f: en effet, si P et Q sont deux polynômes, on a

$$P(f)\circ Q(f)=(PQ)(f)=(QP)(f)=Q(f)\circ P(f)\ .$$

Donc

$$g\big(f^i(x_0)\big)=f^i\big(g(x_0)\big)=f^i\big(P(f)(x_0)\big)=P(f)\big(f^i(x_0)\big)\ .$$

iii) Les endomorphismes g et $P(f)$ coïncident sur tous les vecteurs de la base $\mathcal{B}$. Une application linéaire étant entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base, on conclut que $g=P(f)$.

d. La question **c.** montre que $\mathcal{C}(f)\subset\mathbb{K}[f]$. Finalement, $\mathcal{C}(f)=\mathbb{K}[f]$.

e. La question **c.** montre plus précisément que, pour tout $g\in\mathcal{C}(f)$, il existe un polynôme P **de degré au plus** $n-1$ tel que $g=P(f)$, donc que $g\in\mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E,f,\cdots,f^{n-1})$. On a donc $\mathcal{C}(f)=\mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E,f,\cdots,f^{n-1})$, l'inclusion dans le sens indirect étant immédiate. Comme la famille $(\mathrm{id}_E,f,\cdots,f^{n-1})$ est libre d'après la question **2.**, on conclut que l'espace vectoriel $\mathcal{C}(f)=\mathbb{K}[f]$ est de dimension n, et admet pour base $(\mathrm{id}_E,f,\cdots,f^{n-1})$.

8. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, χ_f est un polynôme annulateur de f (on peut aussi le retrouver assez facilement par le calcul en représentant f par une matrice-compagnon dans une base bien choisie). Les polynômes qui sont multiples de χ_f sont alors aussi annulateurs de f.

Réciproquement, soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de f. Posons la division euclidienne de P par χ_f, i.e. écrivons $P = \chi_f\, Q + R$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$, $R \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg(R) < n$. En substituant l'endomorphisme f à l'indéterminée X, on obtient la relation entre endomorphismes: $0 = P(f) = \chi_f(f) \circ Q(f) + R(f) = R(f)$ puisque $\chi_f(f) = 0$. Décomposons R dans la base canonique de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$: $R = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{n-1} X^{n-1}$. La relation $R(f) = 0$ s'écrit alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k = 0$ et, comme la famille $(\mathrm{id}_E, f, \cdots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$, on déduit que tous les coefficients α_k sont nuls, donc que $R = 0$, donc que $\chi_f \mid P$.

Les polynômes annulateurs de f sont donc exactement les multiples de son polynôme caractéristique χ_f. *On peut montrer, mais c'est plus difficile, que cette propriété caractérise les endomorphismes cycliques.*

9. Localisation des racines d'un polynôme.

a. La relation $AX = \lambda X$ s'écrit, coordonnée par coordonnée: $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \lambda x_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$.

Grâce à l'inégalité triangulaire, on déduit

$$|\lambda\, x_i| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\, |x_j| \leq \Big(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \Big)\, \|X\|_\infty = r_i\, \|X\|_\infty\ .$$

b. On a donc $|\lambda|\, |x_i| \leq N(A)\, \|X\|_\infty$ et, cette majoration étant vraie pour tout indice i, elle "passe au sup", i.e. $|\lambda|\, \|X\|_\infty \leq N(A)\, \|X\|_\infty$. Comme X n'est pas le vecteur nul, on a $\|X\|_\infty > 0$, on déduit donc $|\lambda| \leq N(A)$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(A)$ est inclus dans le disque fermé de centre O et de rayon $N(A)$, dans le plan complexe.

c. On sait que $P = \chi_C$ avec $C = C(a_0, \cdots, a_{n-1})$ matrice-compagnon. On vérifie que

$$N(C) = \max\big\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|, \cdots, 1 + |a_{n-1}|\big\} = R\ .$$

En notant $\overline{D}(O, R)$ le disque fermé de centre O et de rayon R, on a

$$\mathcal{Z}(P) = \mathcal{Z}(\chi_C) = \mathrm{Sp}(C) \subset \overline{D}(O, R)$$

d'après la question **b.**

d. Vu la symétrie des rôles, on peut supposer que $\max\{a, b, c, d\} = a$. On recherche donc les racines entières d'un polynôme unitaire de degré a, à savoir $P = X^a + X^b - X^c - X^d$ (le premier terme est bien le terme dominant, les autres ne sont pas forcément écrits dans l'ordre des puissances décroissantes). Il résulte du **c.** que les racines d'un tel polynôme P sont de module inférieur ou égal à 2. Les seuls entiers naturels qui peuvent être racines de P sont alors 0, 1 et 2. Mais 2 n'est pas racine de P: en effet, si l'on suppose $a > b > c > d$, l'égalité $2^a + 2^b = 2^c + 2^d$, soit $2^b(1 + 2^{a-b}) = 2^d(1 + 2^{c-d})$, est absurde car elle contredit l'unicité de la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers (l'exposant du facteur premier 2 n'étant pas le même dans les deux factorisations). On obtient aussi le même genre de contradiction dans les autres cas de figure.

Par ailleurs, 0 et 1 sont des racines évidentes de l'équation proposée, ce sont donc les seuls entiers naturels solutions.