DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES numéro 4
COMMENTAIRES
PSI2 2025-2026

PROBLÈME 1

PARTIE A.

Ces questions de dénombrement demandent une rédaction précise et une bonne maîtrise, non seulement des notions mathématiques sous-jacentes, mais aussi de la langue française. Sur quelques copies, heureusement plutôt rares, on lit des phrases qui n'ont pas toujours de sens, c'est parfois juste un manque de relecture! L'erreur de rédaction la plus fréquente est probablement celle qui consiste à confondre un ensemble avec son cardinal: par exemple, affirmer que $S(n-1,k-1)$ est l'ensemble constitué de certaines partitions, alors que $S(n-1,k-1)$ est en fait un entier naturel et non pas un ensemble!

Une confusion plus grave vue sur quelques copies: certains affirment que $S(n,k) = \binom{n}{k}$, confondant probablement "partition de $[\![1,n]\!]$ en k parties" et "partie de $[\![1,n]\!]$ ayant k éléments", il n'est pourtant pas difficile en lisant les questions suivantes de voir que cela ne tient pas la route!

PARTIE B.

6. Quelques explications pas toujours très claires, par exemple mentionnant un entier k qui n'a pas été introduit au préalable.

7. Il s'agit ici d'un raisonnement par récurrence **forte**, ce qui n'a pas toujours été clairement perçu. Pour montrer que $B_{n+1} \leq (n+1)!$, il est nécessaire de supposer ici que l'on a $B_k \leq k!$ **pour tout** $k \in [\![0,n]\!]$.

8. J'ai souvent lu que, comme $\dfrac{B_n}{n!} \leq 1$, le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{B_n}{n!} z^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum z^n$. Mettre une valeur absolue autour de $\dfrac{B_n}{n!}$ ou le précéder de " $0 \leq$ " aurait été plus correct!

PROBLÈME 2

Ce problème est constitué de nombreuses questions classiques concernant les endomorphismes cycliques et les matrices qui les représentent, appelées matrices-compagnons.

1. Quelques copies contiennent des calculs complètement hors sujet, la plupart toutefois arrivent à expliciter correctement les vecteurs e_1, $f(e_1)$, $f^2(e_1)$ et à comprendre ce qui est attendu. En revanche, seul un petit nombre d'entre vous a pensé à calculer un **déterminant** pour tester si une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est une base!!! On rentre alors dans des discussions qui n'aboutissent pas toujours, ou bien qui donnent la bonne CNS mais de façon pas toujours convaincante.

3. Quelques tentatives de raisonnements par équivalences, mais qui sont peu convaincantes car la gestion des variables est alors compliquée. Une équivalence logique n'a en effet de sens que si les "variables libres" de part et d'autre du signe $\iff$ sont les mêmes, ce qui était très difficile (et lourd) à rédiger ici.

Il vaut alors mieux procéder par double implication et, dans chaque sens, introduire les variables utiles au moment opportun, par exemple en traduisant que f est cyclique en disant qu'**il existe** un vecteur x_0 de E tel que, etc.

4. Question souvent bien traitée. Il faut dire qu'on l'avait fait en TD...

5.a. Bien lire l'énoncé! L'entier p mentionné dépend du choix d'un vecteur x de E, ce n'est donc pas a priori ce que l'on appelle l'indice de nilpotence de f. La justification correcte de l'existence de p consiste à rappeler que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément (un minimum). La partie de $\mathbb{N}$ à considérer était $\{k \in \mathbb{N} \mid f^k(x) = 0_E\}$, le vecteur x ayant été préalablement introduit.

5.b. L'entier p de la question précédente n'ayant pas toujours été correctement introduit, la rédaction de cette question reste parfois un peu "bancale".

6.a. Dans le développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou colonne, le cofacteur d'indices (i, j) d'une matrice comporte un facteur $(-1)^{i+j}$ très souvent oublié! Il y a donc de nombreuses erreurs de signes. Je rappelle qu'un polynôme caractéristique est censé être unitaire.

6.b. Question assez souvent maltraitée. En effet, si λ est un scalaire quelconque, on peut seulement dire que $\mathrm{rg}(C - \lambda I_n) \geq n - 1$, et il serait bien aussi d'expliquer pourquoi (les $n-1$ premières colonnes, ou bien les $n-1$ dernières lignes de $C - \lambda I_n$ sont "visiblement" indépendantes). Dans le cas seulement où λ est valeur propre de C, alors $\mathrm{rg}(C-\lambda I_n) = n-1$.

6.c. La bonne condition (le polynôme P est scindé à racines simples) a souvent été énoncée, mais il est souvent difficile de comprendre d'où ça sort! En effet, pour une matrice carrée C quelconque, il n'est pas vrai que C est diagonalisable **si et seulement si** son polynôme caractéristique est scindé à racines simples (penser à $C = I_n$) (la condition est suffisante, elle n'est pas nécessaire). Dans le cas particulier d'une matrice-compagnon, cette condition est toutefois **nécessaire et suffisante**, et cela résulte du fait que les sous-espaces propres sont de dimension 1 (question précédente). Cela n'a pas souvent été expliqué correctement.

6.d. Des calculs souvent interrompus car la dernière équation du système linéaire $C^\top X = \lambda X$ n'a pas su être interprétée. Cette dernière équation s'écrivait en fait $\chi_C(\lambda)\, x_1 = 0$, soit... $0 = 0$! puisque λ est par définition racine du polynôme caractéristique χ_C. Il suffisait donc de traiter cette dernière équation par le mépris (en expliquant pourquoi elle ne méritait rien de mieux) et on obtenait directement un vecteur propre.

7. Partie plutôt bien traitée dans l'ensemble, excepté le **e.** plus délicat. Passer rapidement sur les questions faciles (pour **a.** et **b.**, cela ne sert à rien de noircir des pages!)

8. Question plus difficile, très peu de réponses acceptables.

9.a. Quelques erreurs d'indexation, comme $\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_i$ au lieu de $\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$.

9.b. Le rayon R demandé ne doit dépendre que de la matrice A et de ses coefficients, et certainement pas d'un vecteur x (de quel vecteur x ???), ni d'un indice i.