

Espaces probabilisés.

1. Déterminer une distribution de probabilités $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ sur l'ensemble $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket$, telle que la probabilité de l'événement $\llbracket 1, k \rrbracket$ soit proportionnelle à k^2 .
2. En Palombie, lorsqu'il fait soleil un jour, il fait soleil le lendemain une fois sur 10 et, lorsqu'il pleut un jour, il pleut le lendemain 6 fois sur 10.
 - a. Il a fait soleil un lundi. Quelle est la probabilité qu'il fasse soleil le jeudi qui suit ?
 - b. Sachant qu'il a fait soleil le jour J , on note p_n la probabilité qu'il fasse soleil le jour $J+n$. Calculer p_n et $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$. On pourra considérer pour tout n l'événement $E_n = \text{"il fait soleil le jour } J+n\text{"}$ et travailler sur le vecteur-colonne $X_n = \begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(\overline{E_n}) \end{pmatrix}$.
3. Une succession d'individus A_1, \dots, A_n se transmet une information binaire du type "oui" ou "non". Chaque individu A_k transmet l'information qu'il a reçue avec la probabilité p à l'individu A_{k+1} ou la transforme en son contraire avec la probabilité $q = 1 - p$. Chaque individu se comporte indépendamment des autres. Calculer la probabilité π_n pour que l'information reçue par A_n soit identique à celle émise par A_1 . Quelle est la limite de π_n quand n tend vers l'infini ?
4. Soient A_1, \dots, A_n des événements mutuellement indépendants. Montrer que la probabilité pour qu'aucun d'eux ne soit réalisé est majorée par $M = \exp \left(- \sum_{k=1}^n P(A_k) \right)$.
5. Soient m, N, k des entiers naturels au moins égaux à 2, avec $k \leq N$. Une urne contient mN boules dont N sont blanches. On tire k boules dans cette urne, et on s'intéresse à la probabilité de tirer j boules blanches ($0 \leq j \leq k$). On pourra poser $p = \frac{1}{m}$, le nombre $p \in [0, 1]$ est donc la proportion initiale de boules blanches.
 - a. Quelle est cette probabilité si le tirage est avec remise ? On constate qu'elle ne dépend pas de N , mais qu'elle ne dépend que de la proportion p de boules blanches dans l'urne.
 - b. Quelle est cette probabilité si le tirage est sans remise ? Elle dépend alors de N .
 - c. Si N devient très grand devant le nombre k de boules tirées, on a l'intuition que le fait que le tirage s'effectue avec ou sans remise ne va pas changer grand-chose. Le vérifier mathématiquement.
- 6*. On s'intéresse à la survie d'une espèce pour laquelle un individu admet trois descendants avec la probabilité $\frac{1}{8}$, un ou deux descendants avec la probabilité $\frac{3}{8}$, et enfin aucun descendant avec la probabilité $\frac{1}{8}$. On suppose qu'à l'instant initial, la population est composée d'un seul individu. Par conséquent, l'espèce s'éteindra au bout de la première génération avec une probabilité de $x_1 = \frac{1}{8}$.
 - a. Quelle est la probabilité x_2 pour que l'espèce ait disparu à l'issue de la deuxième génération ?
 - b. Pour tout n entier naturel non nul, on note x_n la probabilité que l'espèce ait disparu à l'issue de la n -ème génération. Montrer que la suite (x_n) vérifie la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_{n+1} = \frac{1}{8} (x_n^3 + 3x_n^2 + 3x_n + 1) .$$
 - c. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

7. Un groupe de n chasseurs tire simultanément et indépendamment sur n canards. Chaque chasseur ne tire qu'une seule fois et atteint toujours sa cible.
- Quelle est la probabilité p_n qu'au moins un canard survive ? Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.
 - L'un des canards s'appelle Saturnin. Quelle est la probabilité q_n qu'il survive ? Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n$.

Variables aléatoires.

8. Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent des lois binomiales de tailles n et m et de même paramètre p . Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $Z = X + Y$?
9. Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire simultanément n boules dans celle-ci et on note X le nombre de boules rouges obtenues lors de ce tirage. Quelle est la loi de X , son espérance, sa variance ?
10. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N . On tire n boules sans remise ($1 \leq n \leq N$). On note X et Y le plus petit numéro et le plus grand numéro obtenus.
- Pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, déterminer $P(X \geq k)$. En déduire la loi de X .
 - Pour $l \in \llbracket 1, N \rrbracket$, déterminer $P(Y \leq l)$. En déduire la loi de Y .
 - Quelle est la loi conjointe du couple $U = (X, Y)$?
11. On considère une suite de tirages avec remise dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N . Pour tout $n \geq 1$, on note X_n le nombre de numéros non encore sortis à l'issue du n -ème tirage.
- Que dire de la variable aléatoire X_1 ?
 - Pour $n \geq 1$, quel est l'ensemble $X_n(\Omega)$?
 - En utilisant la formule des probabilités totales, montrer la relation, pour $n \geq 2$ et $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$,
- $$P(X_n = k) = \frac{N-k}{N} P(X_{n-1} = k) + \frac{k+1}{N} P(X_{n-1} = k+1).$$
- En déduire que la suite $(E(X_n))_{n \geq 1}$ est géométrique, et donner l'expression de $E(X_n)$.
12. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$. On suppose que
- $$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2 \quad P(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}.$$
- Déterminer la loi de X . Reconnaître la loi de $X-1$, en déduire $E(X)$.
 - Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
 - Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, avec $m_{i,j} = P(\{X = i\} \cap \{Y = j\})$. Calculer M^2 , en déduire le spectre de M .
- Indication.* On pourra utiliser (et éventuellement prouver) la relation $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.