

Normes, suites convergentes.

1. Soient N et N' deux normes sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E .

a. On note B et B' les boules unités fermées, i.e.

$$B = \{x \in E \mid N(x) \leq 1\} \quad \text{et} \quad B' = \{x \in E \mid N'(x) \leq 1\}.$$

Montrer que $B = B' \implies N = N'$.

b. Même question avec les boules unités ouvertes.

a. Si $x = 0_E$, on a évidemment $N(x) = N'(x) = 0$.

Sinon, notons que, si λ est un réel positif, alors

$$\lambda x \in \overline{B} \iff \lambda N(x) \leq 1 \iff \lambda \leq \frac{1}{N(x)},$$

donc $\{\lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \lambda x \in \overline{B}\} = \left[0, \frac{1}{N(x)}\right]$, et $\frac{1}{N(x)} = \max \{\lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \lambda x \in \overline{B}\}$. Il est maintenant clair que, si $\overline{B} = \overline{B'}$, alors $\frac{1}{N(x)} = \frac{1}{N'(x)}$, donc $N(x) = N'(x)$.

b. Si $x \in E$ est non nul, on a maintenant $\{\lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \lambda x \in B\} = \left[0, \frac{1}{N(x)}\right]$, on en déduit que $\frac{1}{N(x)} = \sup \{\lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \lambda x \in B\}$ et on conclut de la même façon.

2. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N(x, y) = \max_{t \in [0,1]} |x + ty|$.

a. Montrer que l'application N est une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

b. Soit B la boule unité fermée de centre 0_E pour la norme N . Montrer que $B = \bigcap_{t \in [0,1]} B_t$, avec $B_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + ty| \leq 1\}$. Montrer que $B = B_0 \cap B_1$. Dessiner B .

a. L'application N est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Si $N(x, y) = 0$, alors $|x + ty| = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$, donc en particulier pour $t = 0$ ce qui donne $x = 0$, puis pour $t = 1$ ce qui donne alors $y = 0$, donc $(x, y) = (0, 0)$, on a ainsi vérifié l'axiome de séparation.

Si λ est un réel, on a

$$N(\lambda(x, y)) = N(\lambda x, \lambda y) = \max_{t \in [0,1]} |\lambda x + t\lambda y| = \max_{t \in [0,1]} (|\lambda| |x + ty|) = |\lambda| \max_{t \in [0,1]} |x + ty| = |\lambda| N(x, y),$$

on a ainsi montré l'homogénéité. Enfin,

$$\begin{aligned} N((x, y) + (x', y')) &= N(x + x', y + y') \\ &= \max_{t \in [0,1]} |x + x' + t(y + y')| \\ &= \max_{t \in [0,1]} |(x + ty) + (x' + ty')| \\ &\leq \max_{t \in [0,1]} (|x + ty| + |x' + ty'|) \\ &\leq \max_{t \in [0,1]} |x + ty| + \max_{t \in [0,1]} |x' + ty'| = N(x, y) + N(x', y'), \end{aligned}$$

ce qui prouve l'inégalité triangulaire.

b. On a

$$\begin{aligned}
 (x, y) \in B &\iff \max_{t \in [0,1]} |x + ty| \leq 1 \\
 &\iff \forall t \in [0,1] \quad |x + ty| \leq 1 \\
 &\iff \forall t \in [0,1] \quad (x, y) \in B_t \\
 &\iff (x, y) \in \bigcap_{t \in [0,1]} B_t,
 \end{aligned}$$

ce qui montre la première égalité d'ensembles. Il est alors clair que $B = \bigcap_{t \in [0,1]} B_t \subset B_0 \cap B_1$.

Par ailleurs, si $(x, y) \in B_0 \cap B_1$, alors $|x| \leq 1$, $|x + y| \leq 1$, donc pour tout $t \in [0, 1]$,

$$|x + ty| = |(1 - t)x + t(x + y)| \leq (1 - t)|x| + t|x + y| \leq (1 - t) + t = 1,$$

donc $(x, y) \in \bigcap_{t \in [0,1]} B_t = B$, ce qui prouve que $B = B_0 \cap B_1$.

Remarque. En s'inspirant du calcul ci-dessus, on aurait pu prouver dès le départ que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $N(x, y) = \max\{|x|, |x + y|\}$, ce qui rendait l'exercice plus facile!

Il est facile de construire graphiquement B_0 (bande verticale définie par $-1 \leq x \leq 1$) et B_1 (bande oblique définie par $-1 \leq x + y \leq 1$) et d'en déduire B , qui est un parallélogramme plein.

3. Pour toute matrice A appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right)$.

a. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Montrer que l'on a $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c. Pour tout $X = (x_1 \quad \cdots \quad x_n)^\top \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. Prouver la relation $\|AX\|_\infty \leq \|A\| \|X\|_\infty$.

d. Montrer que toute valeur propre réelle λ de la matrice A vérifie $|\lambda| \leq \|A\|$.

a. On a bien sûr $\|A\| \geq 0$, et si $\|A\| = 0$, alors $\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$ est nul pour tout i , ce qui entraîne que

$a_{i,j}$ est nul pour tout i et pour tout j (une somme de réels positifs est nulle **ssi** chaque terme est nul), on a ainsi prouvé l'axiome de séparation. L'homogénéité est une simple formalité. Pour l'inégalité triangulaire, on utilise d'abord l'inégalité triangulaire sur la valeur absolue dans $\mathbb{R}$: $|a_{i,j} + b_{i,j}| \leq |a_{i,j}| + |b_{i,j}|$, d'où, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\sum_{j=1}^n |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^n (|a_{i,j}| + |b_{i,j}|) = \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^n |b_{i,j}| \leq \|A\| + \|B\|.$$

En passant au max, on obtient l'inégalité $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

b. Posons $C = (c_{i,j}) = AB$, alors $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$ puis, pour tout i ,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |c_{i,j}| &= \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right| \leq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n |a_{i,k} b_{k,j}| \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^n \left(|a_{i,k}| \sum_{j=1}^n |b_{k,j}| \right) \leq \sum_{k=1}^n (|a_{i,k}| \|B\|) \\ &\leq \|B\| \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| \leq \|A\| \|B\|. \end{aligned}$$

Certaines des inégalités ci-dessus sont systématiquement des égalités, mais il m'a semblé plus clair de le présenter ainsi.

La majoration obtenue ci-dessus étant vraie pour tout i , elle reste vraie pour le maximum, donc $\|C\| = \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

c. Posons $AX = Y = (y_1 \ \cdots \ y_n)^T$, alors $y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j$ pour tout i , donc

$$|y_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \leq \left(\max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \right) \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leq \|A\| \|X\|_\infty.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout i , on a prouvé que $\|Y\|_\infty = \|AX\|_\infty \leq \|A\| \|X\|_\infty$.

d. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A , il existe $X \in \mathbb{R}^n$ **non nul** tel que $AX = \lambda X$. On a alors $\|AX\|_\infty = \|\lambda X\|_\infty = |\lambda| \|X\|_\infty \leq \|A\| \|X\|_\infty$, d'où $|\lambda| \leq \|A\|$ puisque $\|X\|_\infty$ est un réel strictement positif.

4. Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose $N(f) = \left(f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$.

a. Montrer que N est une norme sur E .

b. Soit $f \in E$. Montrer que

$$\forall x \in [0, 1] \quad f(x)^2 \leq 2 f(0)^2 + 2 \left(\int_0^x |f'(t)| dt \right)^2.$$

c. En déduire que, pour tout $f \in E$, on a $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2} N(f)$.

a. Pour $f \in E$ et $g \in E$, on pose $(f|g) = f(0) g(0) + \int_0^1 f'(t) g'(t) dt$, et on vérifie qu'il s'agit d'un produit scalaire (*on détaillera notamment le caractère défini positif*). Comme $N(f) = \sqrt{(f|f)}$, on déduit que N est une norme sur E .

b. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, on a $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$ pour tout $x \in [0, 1]$. Or, quels que soient les réels a et b , on a l'inégalité "classique" $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ (preuve facile, résulte de $(a - b)^2 \geq 0$), on en déduit que

$$f(x)^2 = \left(f(0) + \int_0^x f'(t) dt \right)^2 \leq 2 f(0)^2 + 2 \left(\int_0^x f'(t) dt \right)^2 .$$

Continuons à majorer : comme

$$\left| \int_0^x f'(t) dt \right| \leq \int_0^x |f'(t)| dt ,$$

$$\text{on a finalement } f(x)^2 \leq 2 f(0)^2 + 2 \left(\int_0^x |f'(t)| dt \right)^2 .$$

- c. Continuons à majorer, d'abord avec $\int_0^x |f'(t)| dt \leq \int_0^1 |f'(t)| dt$ car l'intégrande est positif, puis en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_0^1 |f'(t)| dt \right)^2 \leq \left(\int_0^1 |f'(t)|^2 dt \right) \left(\int_0^1 1^2 dt \right) = \int_0^1 f'(t)^2 dt .$$

On a finalement, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$f(x)^2 \leq 2 f(0)^2 + 2 \int_0^1 f'(t)^2 dt = 2 N(f)^2 ,$$

soit $\|f\|_\infty^2 \leq 2 N(f)^2$, ou encore $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2} N(f)$.

- 5.a. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(k)|$. Montrer que N est une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

- b. Soient $n+1$ réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad P^{(k)}(k) = a_k$. Montrer que cela détermine le polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

- a. D'abord $N(P)$ est une somme finie: si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on peut écrire $N(P) = \sum_{k=0}^n |P^{(k)}(k)|$.

On a clairement $N(P) \geq 0$ et, si P est un polynôme non nul, notons n son degré et a_n son coefficient dominant ($a_n \neq 0$), alors $P^{(n)} = n! a_n$ (polynôme constant), donc $N(P) \geq |P^{(n)}(n)| = n! |a_n| > 0$, ce qui prouve l'axiome de séparation.

L'homogénéité $N(\lambda P) = |\lambda| N(P)$ est immédiate.

Enfin, si $n \geq \max \{ \deg(P), \deg(Q) \}$, alors

$$N(P+Q) = \sum_{k=0}^n |P^{(k)}(k) + Q^{(k)}(k)| \leq \sum_{k=0}^n |P^{(k)}(k)| + \sum_{k=0}^n |Q^{(k)}(k)| = N(P) + N(Q) ,$$

et on a prouvé l'inégalité triangulaire.

- b. L'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \varphi(P) = \left(P(0), P'(1), P''(2), \dots, P^{(n)}(n) \right)$$

est linéaire et injective: en effet, on a vu en **a.** que, si P est non nul de degré d , alors $P^{(d)}(d) \neq 0$, donc $\varphi(P) \neq 0$, elle est donc bijective (isomorphisme) puisque $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = \dim(\mathbb{R}^{n+1})$. Tout $(n+1)$ -uplet $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ de réels admet donc un unique antécédent par φ dans $\mathbb{R}_n[X]$, ce qu'il fallait démontrer.

6. Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P \in E$ et $a \in [0, 1]$, on pose

$$N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| dt .$$

- a.** Montrer que, pour tout $a \in [0, 1]$, N_a est une norme sur E .
b. Soit $(a, b) \in [0, 1]^2$. Montrer que les normes N_a et N_b sur E sont équivalentes.

- a.** Il est clair que $N_a(P) \geq 0$ pour tout $P \in E$.

Si $N_a(P) = 0$, alors $P(a) = 0$ et $\int_0^1 |P'(t)| dt = 0$ (deux termes positifs dont la somme est nulle). Comme $|P'|$ est une fonction continue positive et d'intégrale nulle sur $[0, 1]$, on a alors $P' = 0$ sur $[0, 1]$ d'après le théorème de stricte positivité. Donc P est constante sur $[0, 1]$, elle y est nulle puisque $P(a) = 0$. Enfin, le polynôme P ayant une infinité de racines, c'est le polynôme nul. On a ainsi prouvé l'axiome de séparation.

L'axiome d'homogénéité $N_a(\lambda P) = |\lambda| N_a(P)$ est immédiat.

Enfin, l'inégalité triangulaire est facile:

$$\begin{aligned} N_a(P + Q) &= |P(a) + Q(a)| + \int_0^1 |P'(t) + Q'(t)| dt \\ &\leq |P(a)| + |Q(a)| + \int_0^1 |P'(t)| dt + \int_0^1 |Q'(t)| dt = N_a(P) + N_a(Q) . \end{aligned}$$

- b.** Soient a et b dans $[0, 1]$. Alors, pour tout $P \in E$, on a $N_b(P) = N_a(P) + |P(b)| - |P(a)|$. Or, par le "côté obscur" de l'inégalité triangulaire, puis par l'inégalité triangulaire intégrale,

$$|P(b)| - |P(a)| \leq |P(b) - P(a)| = \left| \int_a^b P'(t) dt \right| \leq \int_{\min\{a,b\}}^{\max\{a,b\}} |P'(t)| dt \leq \int_0^1 |P'(t)| dt .$$

On en déduit que

$$N_b(P) \leq N_a(P) + \int_0^1 |P'(t)| dt \leq 2 N_a(P) .$$

Par symétrie des rôles de a et b , on déduit que

$$\forall P \in E \quad N_b(P) \leq 2 N_a(P) \leq 4 N_b(P) ,$$

les normes N_a et N_b sur E sont donc équivalentes.

7. Soient $f_1, \dots, f_n$ des applications continues de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$. À quelle condition l'application $N : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$N : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \|x_1 f_1 + \dots + x_n f_n\|_\infty$$

définit-elle une norme sur $\mathbb{K}^n$?

Une condition nécessaire est que la famille de fonctions $(f_1, \dots, f_n)$ soit libre dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. En effet, si ce n'est pas le cas, il existe des coefficients non tous nuls $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0$, et alors $N(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0$, ce qui nie l'axiome de séparation.

Cette condition est aussi suffisante. En effet, si elle est satisfaite, alors N est bien une application de $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, on a

$$\begin{aligned} N(x_1, \dots, x_n) = 0 &\iff \|x_1 f_1 + \dots + x_n f_n\|_\infty = 0 \iff x_1 f_1 + \dots + x_n f_n = 0 \\ &\iff (x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0) \end{aligned}$$

par liberté de la famille. De plus, si $\lambda \in \mathbb{K}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, alors

$$N(\lambda x) = \|\lambda(x_1 f_1 + \dots + x_n f_n)\|_\infty = |\lambda| \|x_1 f_1 + \dots + x_n f_n\|_\infty = |\lambda| N(x),$$

et

$$\begin{aligned} N(x + y) &= \|(x_1 f_1 + \dots + x_n f_n) + (y_1 f_1 + \dots + y_n f_n)\| \\ &\leq \|x_1 f_1 + \dots + x_n f_n\|_\infty + \|y_1 f_1 + \dots + y_n f_n\|_\infty = N(x) + N(y), \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme (que l'on connaît, dite "de la convergence uniforme") sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

8. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé de dimension finie. Soit u un endomorphisme de E tel que

$$\forall x \in E \quad \|u(x)\| \leq \|x\|.$$

Montrer que $E = \text{Ker}(u - \text{id}_E) \oplus \text{Im}(u - \text{id}_E)$.

Posons $F = \text{Ker}(u - \text{id}_E)$ et $G = \text{Im}(u - \text{id}_E)$, on sait que $\dim E = \dim F + \dim G$ (théorème du rang). Pour démontrer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires, il suffit donc de montrer qu'ils sont en somme directe, c'est-à-dire que $F \cap G = \{0_E\}$.

Soit donc $x \in F \cap G$, on a alors $u(x) = x$ et il existe $y \in E$ tel que $x = u(y) - y$. On a alors $u(y) = x + y$, puis

$$u^2(y) = u(u(y)) = u(x) + u(y) = x + (x + y) = 2x + y,$$

puis, par une récurrence immédiate, $u^n(y) = n x + y$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De l'hypothèse de l'énoncé (l'application u est 1-lipschitzienne), on déduit que $\|u^n(y)\| \leq \|y\|$: la suite $(\|u^n(y)\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Mais, si on avait $x \neq 0_E$, le "côté obscur" de l'inégalité triangulaire donnerait

$$\|u^n(y)\| = \|nx + y\| \geq \|nx\| - \|y\| \geq n \|x\| - \|y\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

ce qui est contradictoire. On a donc nécessairement $x = 0_E$, ce qui termine l'exercice.

Topologie.

9. Soit A une partie de $\mathbb{R}$, non vide et majorée, soit $M = \sup(A)$ sa borne supérieure.

a. Montrer que $M \in \overline{A}$.

b. Montrer que M est le seul majorant de la partie A qui soit adhérent à A .

a. Si $M = \sup(A)$, comme M est le plus petit majorant de la partie A , alors pour tout n entier naturel non nul, le réel $M - \frac{1}{n}$ ne majore pas la partie A , il existe donc un élément x_n de A tel que $M - \frac{1}{n} < x_n \leq M$. De cet encadrement, il résulte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = M$, on a donc constitué une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers M , le réel M est donc adhérent à la partie A .

b. Si M' est un majorant de la partie A autre que $M = \sup(A)$, alors M' n'est pas le plus petit majorant de A , il existe donc un réel strictement positif ε tel que $M' - \varepsilon$ majore la partie A . Si (x_n) est une suite d'éléments de A , on a alors $x_n \leq M' - \varepsilon$ pour tout n , cette suite (x_n) ne peut alors converger vers M' , le réel M' n'est donc pas adhérent à la partie A .

10. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que tout sous-espace vectoriel de E est une partie fermée de E .

Soit F un sous-espace de E , soit G un supplémentaire de F dans E , notons p le projecteur sur G parallèlement à F . Alors $p : E \rightarrow E$ est une application continue (application linéaire en dimension finie), et $F = \text{Ker}(p) = p^{-1}(\{0_E\})$; Le singleton $\{0_E\}$ est une partie fermée de E , son image réciproque F est alors aussi une partie fermée de E .

11. Soit E un espace vectoriel normé, soit F un sous-espace vectoriel de E .

Deux questions indépendantes

a. Montrer que l'adhérence $\overline{F}$ de F est un sous-espace vectoriel de E .

b. Montrer que, si F admet un point intérieur, alors $F = E$.

a. Il est clair que $0_E \in F \subset \overline{F}$, donc $\overline{F} \neq \emptyset$. Par ailleurs, soient x et y deux points de $\overline{F}$, soient λ et μ deux scalaires : par caractérisation séquentielle des points adhérents, on sait qu'il existe deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de F convergeant vers x et y respectivement. On a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda x + \mu y$ (opérations algébriques sur les suites convergentes) et, comme $\lambda x_n + \mu y_n \in F$ pour tout n , on en déduit que $\lambda x + \mu y \in \overline{F}$. L'ensemble $\overline{F}$ est donc stable par combinaisons linéaires, ce qu'il fallait démontrer.

b. Soit a un point intérieur à F , il existe donc $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset F$; on a alors

$B(0_E, r) \subset F$: en effet, si $x \in B(0_E, r)$, on écrit $x = (a+x) - a$ avec $\begin{cases} a \in B(a, r) \subset F \\ a+x \in B(a, r) \subset F \end{cases}$ et, comme F est un sous-espace vectoriel de E , on déduit $x \in F$. Le point 0_E est donc intérieur au s.e.v. F . Si on prend $x \in E$ non nul, alors le vecteur $y = \frac{r}{2\|x\|}x$ a pour norme $\frac{r}{2}$, donc il appartient à F et, comme F est un s.e.v., on a $x = \frac{2\|x\|}{r}y \in F$. Donc $F = E$.
Par contraposition, on a montré que tout sous-espace vectoriel strict de E est d'intérieur vide.

12. Soit A une partie convexe d'un espace vectoriel normé E .

a. Montrer que son adhérence $\overline{A}$ est convexe.

b*. Montrer que son intérieur $\overset{\circ}{A}$ est convexe.

a. Soient $x \in \overline{A}$ et $y \in \overline{A}$, on doit montrer que $z = (1-t)x + ty \in \overline{A}$ pour tout $t \in [0, 1]$. Or, il existe une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers x , et une suite (y_n) d'éléments de A qui converge vers y . Si on pose $z_n = (1-t)x_n + ty_n$, alors par opérations sur les suites convergentes, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = (1-t)x + ty = z$. Mais, A étant convexe, on a $z_n \in A$ pour tout n , donc $z = \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n \in \overline{A}$.

b. Soient $x \in \overset{\circ}{A}$ et $y \in \overset{\circ}{A}$, soit $t \in [0, 1]$, on doit montrer que $z = (1-t)x + ty \in \overset{\circ}{A}$. Or, il existe $r' > 0$ et $r'' > 0$ tels que les boules $B(x, r')$ et $B(y, r'')$ soient incluses dans A . En posant $r = \min\{r', r''\}$, on a $r > 0$, $B(x, r) \subset A$ et $B(y, r) \subset A$. Montrons que $B(z, r) \subset A$.

Soit donc $z' \in B(z, r)$, on a alors $z' = z + u$ avec $\|u\| < r$. Si l'on pose $x' = x + u$ et $y' = y + u$, alors $\|x' - x\| = \|y' - y\| = \|u\| < r$, donc $x' \in B(x, r)$ et $y' \in B(y, r)$. Les points x' et y' sont alors tous deux dans A . Il reste à voir (*faire un dessin!*) que

$$(1-t)x' + ty' = (1-t)(x+u) + t(y+u) = ((1-t)x + ty) + u = z + u = z'.$$

Comme A est convexe, on déduit que $z' \in A$. On a finalement $B(z, r) \subset A$, ce qui montre que le point z est intérieur à A , i.e. $z \in \overset{\circ}{A}$, ce qu'il fallait prouver.

13. Montrer qu'une partie A d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E est convexe si et seulement si, pour tout couple $(x, y) \in E^2$, l'ensemble $I_{x,y} = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid x + \lambda y \in A\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Rappelons d'abord que, dans $\mathbb{R}$, les intervalles sont les parties convexes, autrement dit une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si

$$\forall (\lambda, \mu) \in I^2 \quad \forall t \in [0, 1] \quad (1-t)\lambda + t\mu \in I$$

(on peut toujours supposer $\lambda < \mu$).

Soit alors A une partie d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E .

• Supposons A convexe. Soient $x \in E$ et $y \in E$, soient $\lambda \in I_{x,y}$, soit $\mu \in I_{x,y}$, soit $t \in [0, 1]$. On a par hypothèse $x + \lambda y \in A$ et $x + \mu y \in A$. Puis

$$x + ((1-t)\lambda + t\mu)y = (1-t)(x + \lambda y) + t(x + \mu y) \in A$$

puisque A est supposé convexe. Ainsi, la partie $I_{x,y}$ de $\mathbb{R}$ est convexe, c'est donc un intervalle.

• Supposons que, pour tout couple $(x, y) \in E^2$, $I_{x,y}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Choisissons x et y dans A , alors $0 \in I_{x,y-x}$ et $1 \in I_{x,y-x}$. Comme $I_{x,y-x}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, il contient le segment $[0, 1]$. On a donc, pour tout $t \in [0, 1]$, $t \in I_{x,y-x}$, i.e. $x + t(y-x) = (1-t)x + ty \in A$, donc la partie A de E est convexe.

Limites et continuité des fonctions vectorielles de variable vectorielle

14. Étudier la limite éventuelle en $(0, 0)$ des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ ci-dessous:

$$\text{a. } (x, y) \mapsto \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \quad ; \quad \text{b. } (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^4 + y^4} \quad ; \quad \text{c. } (x, y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad .$$

a. Pour $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on observe que

$$|f(r \cos \theta, r \sin \theta)| = r |\cos^3 \theta + \sin^3 \theta| \leq 2r = 2\sqrt{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} ,$$

donc pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on a $0 \leq |f(x, y)| = |f(x, y) - 0| \leq 2 \|(x, y)\|_2$.

Comme $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \|(x, y)\|_2 = 0$, on déduit par encadrement que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.

b. Pour $x \neq 0$, on a $f(x, x) = \frac{1}{2x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$, donc f n'a pas de limite lorsque $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, même pas de limite infinie puisque, pour $x \neq 0$, $f(x, 0) = 0$.

c. Pour $x \neq 0$, on a $f(x, 0) = 0$ et $f(x, x^2) = \frac{1}{2}$. Donc f n'a pas de limite en $(0, 0)$. En effet, les suites $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$ et $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$ tendent toutes deux vers $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, et les suites images, de terme général respectivement $f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = 0$ et $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$, ont des limites différentes.

15. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{e^x - e^y}{x - y}$ si $x \neq y$, et $f(x, x) = e^x$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Méthode 1. La fonction exponentielle étant dérivable sur $\mathbb{R}$, on peut lui appliquer l'égalité des accroissements finis: si x et y sont deux réels, alors il existe un réel c compris entre x et y tel que $e^x - e^y = (x - y) e^c$ (la dérivée de la fonction exponentielle étant elle-même). Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a donc $f(x, y) = e^c$, où c est un réel compris entre x et y , et ceci reste vrai lorsque $x = y$ en prenant $c = x = y$.

En tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq y$, la fonction f est continue en tant que quotient de deux fonctions continues $(x, y) \mapsto e^x - e^y$ et $(x, y) \mapsto x - y$ avec un dénominateur non nul.

En un point de la forme (a, a) , montrons la continuité de f par caractérisation séquentielle: soit (x_n, y_n) une suite de points de $\mathbb{R}^2$ convergeant vers (a, a) , ce qui signifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a$. Alors, pour tout n , il existe un réel c_n , compris entre x_n et y_n , tel que $f(x_n, y_n) = e^{c_n}$. Mais, par encadrement, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = a$, donc par continuité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n, y_n) = e^a = f(a, a)$, ce qu'il fallait démontrer.

Méthode 2. Soit la fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\varphi(t) = \frac{e^t - 1}{t}$ si $t \neq 0$, et $\varphi(0) = 1$. Cette fonction est alors continue sur $\mathbb{R}$ (par les théorèmes d'opérations en tout point autre que 0, et aussi en 0 car c'est un "prolongement par continuité" usuel). En distinguant les cas $x \neq y$ et $x = y$, on constate que $f(x, y) = e^y \varphi(x - y)$ pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Donc f est directement continue sur $\mathbb{R}^2$ comme produit et composée de fonctions continues.

-
16. Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k = A$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k^{-1} = B$. Montrer que A est inversible et $A^{-1} = B$.

On a $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k = A$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k^{-1} = B$. Par continuité du produit matriciel, on déduit $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k A_k^{-1} = AB$. Mais, pour tout k , on a $A_k A_k^{-1} = I_n$. Donc $I_n = AB$, ce qui signifie que A est inversible et $A^{-1} = B$.

-
17. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = P$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} B^k = Q$.
- Montrer que P et Q sont des matrices de projecteurs. Calculer AP et PA .
 - On suppose que A et B commutent. Montrer que P et Q commutent.

-
- a. Comme la suite (A^k) converge vers P , il en est de même de toute suite extraite, ainsi $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^{2k} = P$. Mais on a aussi $A^{2k} = A^k A^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} P^2$ par continuité du produit matriciel. Par unicité de la limite, on déduit $P^2 = P$. De même, $Q^2 = Q$.

Puisque $A^k \rightarrow P$, toujours par continuité du produit matriciel, $A A^k \rightarrow AP$, mais on a aussi $A A^k = A^{k+1} \rightarrow P$ car (A^{k+1}) est une suite extraite de (A^k) . Par unicité de la limite, $AP = P$. On a de même $PA = P$.

- b. Si A et B commutent, on montre par des récurrences immédiates que, pour tout k entier naturel, A commute avec B^k , et A^k commute avec B^k . Par continuité du produit matriciel, $A^k B^k \rightarrow PQ$ et $B^k A^k \rightarrow QP$. Comme $A^k B^k = B^k A^k$, par unicité de la limite, on déduit $PQ = QP$.

-
18. Soit $T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculer T^k pour $k \in \mathbb{N}$.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n$, avec $M_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} T^k$.

On calcule $T^2 = \begin{pmatrix} a^2 & b(a+c) \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}$, $T^3 = \begin{pmatrix} a^3 & b(a^2+ac+c^2) \\ 0 & c^3 \end{pmatrix}$, et on conjecture que

$$T^k = \begin{pmatrix} a^k & b \sum_{i=0}^{k-1} a^i c^{k-1-i} \\ 0 & c^k \end{pmatrix}, \text{ il ne reste plus qu'à vérifier l'hérédité. Remarquons que}$$

$T^0 = I_2$ par convention et que la formule reste vraie pour $k = 0$ en convenant qu'une somme vide vaut 0.

• Si $a = c$, on peut écrire $T^k = \begin{pmatrix} a^k & bka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{pmatrix}$ pour $k \geq 1$, donc $M_n = \begin{pmatrix} u_n & v_n \\ 0 & u_n \end{pmatrix}$, avec

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!}, \text{ et } v_n = b \sum_{k=1}^n \frac{ka^{k-1}}{k!} = b \sum_{k=1}^n \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} = b \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!}. \text{ Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^a \text{ et}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = be^a, \text{ on a } \exp(T) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} T^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = e^a \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

• Si $a \neq c$, on a $T^k = \begin{pmatrix} a^k & b \frac{a^k - c^k}{a - c} \\ 0 & c^k \end{pmatrix}$, donc $M_n = \begin{pmatrix} u_n & v_n \\ 0 & w_n \end{pmatrix}$, avec $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!}$,

$$v_n = \frac{b}{a - c} \left(\sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{c^k}{k!} \right) \text{ et } w_n = \sum_{k=0}^n \frac{c^k}{k!}. \text{ Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^a, \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = e^c \text{ et}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = b \frac{e^a - e^c}{a - c}, \text{ on a } \exp(T) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} T^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = \begin{pmatrix} e^a & b \frac{e^a - e^c}{a - c} \\ 0 & e^c \end{pmatrix}.$$

19. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé. Pour tout $x \in E$, on pose $f(x) = \frac{x}{1 + \|x\|}$.

On note $B = B(0_E, 1) = \{x \in E \mid \|x\| < 1\}$ la boule unité ouverte de E .

a. Montrer que f est une bijection de E sur B , expliciter f^{-1} .

b. Montrer que f et f^{-1} sont continues.

c*. Montrer que f est 1-lipschitzienne. L'application f^{-1} est-elle lipschitzienne ?

a. On a $\|f(x)\| = \frac{\|x\|}{1 + \|x\|} < 1$, donc $f(x) \in B$. Soit $y \in B$, si $f(x) = y$ alors $\|y\| = \frac{\|x\|}{1 + \|x\|}$

$$\text{donc } \|x\| = \frac{\|y\|}{1 - \|y\|} \text{ puis } x = (1 + \|x\|) y = \frac{y}{1 - \|y\|}, \text{ on vérifie!}$$

b. C'est évident!

c. f^{-1} n'est pas lipschitzienne car elle envoie B (borné) sur E (non borné).

$$\text{Soient } x \in E, y \in E, \text{ alors } f(x) - f(y) = \frac{N}{D} \text{ avec}$$

$$N = x - y + \|y\| x - \|x\| y = (x - y) + (\|y\| - \|x\|) x - \|x\| (y - x)$$

et $D = 1 + \|x\| + \|y\| + \|x\| \|y\| \geq 1 + \|x\| + \|y\|$. On majore $\|N\| \leq (1 + 2\|x\|) \|x - y\|$ et, par symétrie, $\|N\| \leq (1 + 2\|y\|) \|x - y\|$ puis, par demi-somme, $\|N\| \leq (1 + \|x\| + \|y\|) \|x - y\|$. Finalement, $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$. Y a-t-il plus simple ?

20. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer l'équivalence entre les trois assertions suivantes:

(a): u est lipschitzienne ; (b): u est continue sur E ; (c): u est continue en 0_E .

Les implications (a) $\implies$ (b) et (b) $\implies$ (c) sont triviales. Il ne reste donc plus qu'à démontrer que (c) $\implies$ (a).

Supposons donc u continue en le point 0_E . En choisissant $\varepsilon = 1$ dans la définition de la continuité, on peut lui associer un $\alpha > 0$ tel que **(*)**: $\forall x \in E \quad \|x\|_E \leq \alpha \implies \|u(x)\|_F \leq 1$.

Soit alors $x \in E$ non nul. Le vecteur $y = \frac{\alpha}{\|x\|_E} x$ vérifie $\|y\|_E = \alpha$. De **(*)**, on déduit donc que $\|u(y)\|_F \leq 1$, ce qui entraîne (par la linéarité de u et l'homogénéité de la norme), $\frac{\alpha}{\|x\|_E} \|u(x)\|_F \leq 1$. On a donc $\|u(x)\|_F \leq \frac{1}{\alpha} \|x\|_E$ pour tout $x \in E$ (l'inégalité étant triviale pour $x = 0_E$).

Enfin, u étant linéaire, si x et x' sont deux vecteurs de E , on a

$$\|u(x) - u(x')\|_F = \|u(x - x')\|_F \leq \frac{1}{\alpha} \|x - x'\|_E,$$

l'application u est donc $\frac{1}{\alpha}$ -lipschitzienne.

21. Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Soit $T_p = T + \text{diag}\left(\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \dots, \frac{n}{p}\right)$. Montrer que, pour p suffisamment grand, la matrice T_p a n valeurs propres distinctes. Montrer que toute matrice trigonalisable est limite d'une suite de matrices diagonalisables.

Comme T_p est aussi triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont $a_1 + \frac{1}{p}, a_2 + \frac{2}{p}, \dots, a_n + \frac{n}{p}$. Pour avoir $a_i + \frac{i}{p} = a_j + \frac{j}{p}$ avec $i \neq j$, il est nécessaire que l'on ait $a_i \neq a_j$ et $p |a_i - a_j| = |i - j| \leq n - 1$, soit $p \leq \frac{n - 1}{|a_i - a_j|}$. Les nombres $\frac{n - 1}{|a_i - a_j|}$, où i et j sont deux indices de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $a_i \neq a_j$, sont en nombre fini, il y a donc un plus grand d'entre eux, notons-le M . Pour $p > M$, la matrice T_p admet n valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ trigonalisable: $A = PTP^{-1}$ avec P inversible et T triangulaire supérieure. On peut construire une suite de matrices diagonalisables (T_p) qui converge vers T . Alors,

pour tout p , la matrice $A_p = PT_pP^{-1}$ est aussi diagonalisable et, par continuité du produit matriciel, on a $\lim_{p \rightarrow +\infty} A_p = \lim_{p \rightarrow +\infty} PT_pP^{-1} = PTP^{-1} = A$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. La même preuve est valable avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et, comme il est connu que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable, on a ainsi prouvé que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables est dense dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

22. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $d_n : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$, $A \mapsto d_n(A) = \det A$, est continue.

- b. Montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est limite d'une suite de matrices inversibles.
- c. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique. *On étudiera d'abord le cas particulier où A est inversible.*

- a. On peut raisonner par récurrence sur n . Pour $n = 1$, l'application $d_1 : \mathcal{M}_1(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ n'est autre que l'application identique de $\mathbb{K}$ (puisque, si $A = (a_{1,1}) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$, alors $d_1(A) = \det(A) = a_{1,1}$), elle est donc continue.

Soit $n \geq 2$, supposons l'application d_{n-1} continue sur $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$; alors la formule du développement d'un déterminant d'ordre n par rapport à la première colonne montre que

$$d_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \varphi_i \cdot d_{n-1} \circ f_i, \text{ avec les notations suivantes : pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket,$$

- φ_i est la forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui, à toute matrice A , associe son coefficient $a_{i,1}$ d'indices $(i, 1)$;

- f_i est l'application (évidemment linéaire) qui, à toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, associe la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ extraite de A en supprimant la i -ième ligne et la première colonne.

Comme φ_i et f_i sont linéaires en dimension finie, elles sont continues, donc d_n est continue comme somme, produit et composée d'applications continues.

- b. $\text{GL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid d_n(A) \neq 0\} = d_n^{-1}(\mathbb{K}^*)$: le groupe linéaire $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est l'image réciproque par l'application continue d_n de l'ouvert $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ de $\mathbb{K}$, c'est donc un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors la matrice $A - \lambda I_n$ est inversible pour tout scalaire λ n'appartenant pas à $\text{Sp}(A)$. Comme le spectre de A est un ensemble fini, il existe une suite $(\lambda_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de scalaires n'appartenant pas à $\text{Sp}(A)$ et convergeant vers 0. La suite de matrices $(B_p)_{p \in \mathbb{N}}$, où l'on a posé $B_p = A - \lambda_p I_n$ est une suite de matrices inversibles convergeant vers A . L'ensemble $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est donc dense dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (*on peut approcher toute matrice par des matrices inversibles*).

- c. Si A est inversible, alors les matrices AB et BA sont semblables puisque $BA = A^{-1}(AB)A$, elles ont donc le même polynôme caractéristique.

Sinon, considérons une suite (A_k) de matrices inversibles convergeant vers A . Par continuité du produit matriciel, on déduit $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k B = AB$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} B A_k = BA$. Puis, pour tout $z \in \mathbb{C}$ fixé, on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} (zI_n - A_k B) = zI_n - AB$, et enfin par continuité du déterminant (c'est-à-dire de l'application d_n étudiée en a.), on déduit que

$$\chi_{A_k B}(z) = \det(zI_n - A_k B) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \det(zI_n - AB) = \chi_{AB}(z) .$$

De même, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \chi_{BA_k}(z) = \chi_{BA}(z)$.

Comme $\chi_{A_k B} = \chi_{BA_k}$ pour tout k puisque A_k est inversible, on a donc $\chi_{AB}(z) = \chi_{BA}(z)$, et ceci pour tout z , d'où l'égalité des polynômes χ_{AB} et χ_{BA} .

23*. Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue, soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon $R > 0$.

- a. Montrer qu'il existe deux points A et B de $\mathcal{C}$ diamétralement opposés tels que $g(A) = g(B)$.
- b. Montrer qu'il existe deux points C et D de $\mathcal{C}$, se déduisant l'un de l'autre par un quart de tour de centre O , tels que $g(C) = g(D)$.

- a. La fonction $\begin{cases} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto g(R \cos t, R \sin t) \end{cases}$ est continue comme composée de fonctions continues, et elle est 2π -périodique. La fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(t) = f(t+\pi) - f(t)$ est continue aussi, et on a $h(0) + h(\pi) = 0$. Les réels $h(0)$ et $h(\pi)$ étant de signes contraires (au sens large), il résulte du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe au moins un réel t_0 en lequel h s'annule. Or, la relation $h(t_0) = 0$ signifie précisément que g prend la même valeur en les deux points diamétralement opposés sur le cercle $\mathcal{C}$ qui sont $A \begin{pmatrix} R \cos(t_0) \\ R \sin(t_0) \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} -R \cos(t_0) \\ -R \sin(t_0) \end{pmatrix}$.

- b. Posons $k(t) = f\left(t + \frac{\pi}{2}\right) - f(t)$. Alors k est continue sur $\mathbb{R}$ et on observe que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad k(t) + k\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + k(t + \pi) + k\left(t + \frac{3\pi}{2}\right) = 0 .$$

Les quatre réels figurant dans la somme ci-dessus ne peuvent être tous strictement positifs, ni tous strictement négatifs. Il résulte encore du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe au moins un réel t_0 en lequel k s'annule, ce qui fournit le résultat escompté.

Dérivation des fonctions vectorielles de variable réelle

- 24.** Soit E un espace euclidien, soit $f : [a, b] \rightarrow E$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, de dérivée bornée sur $]a, b[$: $\exists M \in \mathbb{R}_+ \quad \forall t \in]a, b[\quad \|f'(t)\| \leq M$. En considérant l'application $\varphi : t \mapsto (f(b) - f(a)|f(t))$, montrer l'inégalité

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M(b - a) .$$

L'application φ proposée est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, à valeurs réelles. Pour $t \in]a, b[$, on a $\varphi'(t) = (f(b) - f(a)|f'(t))$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\forall t \in]a, b[\quad |\varphi'(t)| = |(f(b) - f(a)|f'(t))| \leq \|f(b) - f(a)\| \|f'(t)\| \leq M \|f(b) - f(a)\| .$$

L'inégalité des accroissements finis pour les fonctions à valeurs réelles donne alors

$$\|f(b) - f(a)\|^2 = |\varphi(b) - \varphi(a)| \leq M \|f(b) - f(a)\| (b - a) .$$

Si $\|f(b) - f(a)\| > 0$, on simplifie par cette quantité et on obtient l'inégalité demandée.

Si $\|f(b) - f(a)\| = 0$, l'inégalité à démontrer est triviale.

- 25.** Soit E un espace euclidien, soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \rightarrow E$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\forall t \in I \quad f(t) \neq 0$. On pose $\varphi(t) = \|f(t)\|$ pour tout $t \in I$. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I , et calculer φ' et φ'' .

Réponse partielle. On obtient $\varphi'(t) = \frac{(f(t)|f'(t))}{\|f(t)\|}$.

Posons $q(t) = \|f(t)\|^2 = (f(t)|f(t))$, alors q est de classe $\mathcal{C}^2$ et $q'(t) = 2 (f(t)|f'(t))$.

Comme $\varphi(t) = \sqrt{q(t)}$ avec $q(t) > 0$ pour tout t , alors φ est de classe $\mathcal{C}^2$ par composition et

$$\varphi'(t) = \frac{q'(t)}{2\sqrt{q(t)}} = \frac{(f(t)|f'(t))}{\|f(t)\|} .$$

On dérive une deuxième fois, on obtient

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= \frac{\left(\|f'(t)\|^2 + (f(t)|f''(t)) \right) \|f(t)\| - (f(t)|f'(t)) \frac{(f(t)|f'(t))}{\|f(t)\|}}{\|f(t)\|^3} \\ &= \frac{\|f'(t)\|^2 \|f(t)\|^2 + (f(t)|f''(t)) \|f(t)\|^2 - (f(t)|f'(t))^2}{\|f(t)\|^3} . \end{aligned}$$