

Équations linéaires scalaires d'ordre un.

1. Résoudre, sur
- $\mathbb{R}_+^*$
- ou
- $\mathbb{R}_-^*$
- , l'équation différentielle

$$(\mathbf{E}) \quad : \quad x y' - 2y = 0 .$$

Quelles sont les solutions de $(\mathbf{E})$ sur $\mathbb{R}$? Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des solutions de $(\mathbf{E})$ sur $\mathbb{R}$?

2. Résoudre, sur
- $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
- , l'équation différentielle
- $y' - (\tan x) y + \cos^2 x = 0$
- .

3. Montrer que l'équation différentielle
- $(\mathbf{E}) : xy' + y = \tan(x)$
- admet une unique solution de classe
- $\mathcal{C}^1$
- sur l'intervalle ouvert
- $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
- .

4. Soit l'endomorphisme
- Φ
- de
- $\mathbb{R}[X]$
- défini par
- $\Phi(P) = (2X + 1)P - (X^2 - 1)P'$
- . Déterminer les éléments propres de
- Φ
- .

5. Soit
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- , de classe
- $\mathcal{C}^1$
- . On suppose que
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(x) + f(x)) = 0$
- . Montrer que
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
- . En posant
- $u = f + f'$
- , on écrira que
- f
- vérifie l'équation différentielle
- $y' + y = u$
- , dont on exprimera les solutions sous forme intégrale.

6. Soit
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
- , continue et
- 2π
- périodique. Montrer que l'équation
- $(\mathbf{E}) : y' - y = f(x)$
- admet une unique solution
- 2π
- périodique
- y_0
- , puis montrer que
- y_0
- est la seule solution de
- $(\mathbf{E})$
- bornée sur
- $\mathbb{R}$
- .

Équations linéaires scalaires d'ordre deux.

7. Résoudre l'équation différentielle
- $y'' + y' - 2y = x e^{2x}$
- .

8. En recherchant les solutions développables en série entière, résoudre sur
- $\mathbb{R}$
- l'équation différentielle

$$(1 + x^2) y'' + 4x y' + 2y = 0 .$$

9. Résoudre l'équation différentielle
- $x^2 y'' + x y' - y = 2x$
- sur
- $\mathbb{R}_+^*$
- en utilisant le changement de variable
- $x = e^t$
- .

10. Résoudre l'équation différentielle
- $(1 + x^2) y'' - 2y = 0$
- . On commencera par chercher des solutions polynomiales.

11. En posant
- $z = e^{x^2} y$
- , résoudre sur
- $\mathbb{R}$
- l'équation différentielle

$$y'' + 4x y' + (3 + 4x^2) y = 0 .$$

12. Résoudre, sur
- $\mathbb{R}_+^*$
- , l'équation différentielle
- $x^3 y'' + x y' - y = 0$
- . On commencera par chercher une solution polynomiale non nulle.

13. Soit l'équation différentielle
- $(\mathbf{E}) : 4x y'' + 2y' - y = 0$
- .

a. Chercher les solutions de $(\mathbf{E})$ développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathbf{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Systèmes différentiels linéaires

14. Résoudre le système différentiel linéaire d'écriture matricielle $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On pourra, soit utiliser la méthode générale, soit poser le changement de fonction inconnue $X(t) = e^t Y(t)$.

15. Résoudre le système différentiel
$$\begin{cases} x' = 2x - y - z \\ y' = -x + 2y - z \\ z' = -x - y + 2z \end{cases}$$

Problèmes se ramenant à une équation différentielle

16. Trouver toutes les applications continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x) f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t) dt .$$

17. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dérivables, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = x f(-x) .$$

18. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, dérivables, telles que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$. On montrera que f est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre, puis on posera le changement de variable $x = e^t$.

19. Soit λ un réel, soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Déterminer les fonctions $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, continues, telles que

$$\forall x \in [0, 1] \quad u(x) = \lambda \int_0^x u(t) dt + f(x) .$$

20. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continues, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) - 2 \int_0^x f(t) \cos(x-t) dt = 1 .$$

Exercices avec Python

21. Soit l'équation différentielle **(E)**: $(1-x)^3 y'' - y = 0$.

On note f l'unique solution de **(E)** sur $] -\infty, 1[$ vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

- a. Justifier l'existence et l'unicité de f .
- b. Tracer une approximation du graphe de f sur $[0 ; 0,09]$ en utilisant la méthode d'Euler.
- c. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -\infty, 1[$.

Pour tout n entier naturel, on pose $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

- d. Pour $n \geq 1$, trouver une relation de récurrence liant les coefficients a_{n-1} , a_n , a_{n+1} , a_{n+2} .
- e. Avec Python, calculer a_n pour $n \in \llbracket 0, 20 \rrbracket$.
- f. Montrer que $|a_n| \leq 4^n$ pour tout n .
- g. Que peut-on en déduire concernant la fonction f ?