COLLES de MATHÉMATIQUES **PSI2 2025-2026**

Semaine 12 : du 05/01 au 09/01

Espaces vectoriels normés

Le programme précédent, plus:

Topologie dans un e.v.n.: points intérieurs, parties ouvertes. Points adhérents, parties fermées, caractérisations séquentielles. Intérieur, adhérence. Parties denses. Les ouverts sont les complémentaires des fermés et réciproquement. Réunions et intersections.

Dans un espace vectoriel de dimension finie, l'équivalence des normes permet de parler de suite convergente, de partie ouverte ou fermée, etc. sans avoir à préciser quelle norme est choisie.

Limite d'une application (d'une partie d'un e.v.n. vers un e.v.n.), caractérisation séquentielle, opérations algébriques, composition, étude coordonnée par coordonnée si l'espace d'arrivée est de dimension finie. Continuité en un point.

Continuité sur une partie. Opérations algébriques, composition. Cas des fonctions lipschitziennes. Image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une application continue.

Théorème des bornes atteintes: toute fonction numérique continue sur une partie fermée bornée non vide d'un e.v. de dimension finie est bornée et atteint ses bornes (*admis*).

En dimension finie, les applications linéaires sont lipschitziennes donc continues, et les applications bilinéaires et multilinéaires sont continues. Continuité du produit matriciel. Continuité de l'application $M \mapsto \det(M)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Fonctions vectorielles et équations différentielles

Dérivation des fonctions vectorielles (à valeurs dans un e.v.n. de dimension finie): définition, équivalence entre la dérivabilité en un point et l'existence d'un développement limité à l'ordre un en ce point. Dérivation de $L \circ f$, de $B(f, g)$ et de $M(f_1, \cdots, f_n)$ avec L linéaire, B bilinéaire, M multilinéaire. Dérivation coordonnée par coordonnée dans une base, fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ ou $\mathcal{C}^\infty$.

Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre un: $y' + a(x)\, y = b(x)$ avec $a,\ b : I \to \mathbb{K}$ continues. Expression intégrale des solutions, structure de l'ensemble des solutions. Théorème de Cauchy linéaire.

Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre deux: théorème de Cauchy linéaire (*admis*), structure de l'ensemble des solutions. Méthode de variation de la constante (ou méthode de Lagrange) pour trouver toutes les solutions lorsqu'on connaît une solution de l'équation homogène ne s'annulant pas sur I. Cas des équations à coefficients constants (révisions du programme de première année).

Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants $X' = AX$. *Les programmes ne comportent plus aucun résultat théorique comme le théorème de Cauchy ou la dimension de l'espace des solutions, mais mentionnent juste l'utilisation de la diagonalisation des matrices pour résoudre quelques systèmes simples.*

Démonstrations de cours ou proches du cours

- Toute boule d'un e.v.n. est convexe.
- Comparaison des trois normes usuelles N_1, N_2 et N_∞ sur $\mathbb{R}^n$.
- Une boule ouverte est un ouvert, une boule fermée est un fermé.
- Image réciproque d'un fermé ou d'un ouvert par une application continue.
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Dérivation de $L \circ f$, de $B(f, g)$, avec L linéaire, B bilinéaire, en dimension finie.
- Expression intégrale des solutions de $y' + a(x)y = b(x)$, avec $a, b : I \to \mathbb{K}$ continues.