

PROBLÈME 1

Dans tout ce problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour tout réel t strictement positif, on note D_t la matrice diagonale

$$D_t = \text{diag}(t, t^2, t^3, \dots, t^n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice carrée d'ordre n , on note $\mathcal{S}_A$ la **classe de similitude** de A , c'est-à-dire l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui sont semblables à la matrice A :

$$\mathcal{S}_A = \{PAP^{-1} ; P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})\}.$$

On appelle **matrice scalaire** toute matrice de la forme λI_n , avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$, identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, de la norme notée $\|\cdot\|_1$ définie par

$$\forall X = (x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \quad \|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

On notera S_n la sphère unité de $\mathbb{C}^n$ pour cette norme, i.e.

$$S_n = \{X \in \mathbb{C}^n \mid \|X\|_1 = 1\}.$$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice carrée d'ordre n à coefficients complexes, on pose

$$N(A) = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right).$$

On définira aussi le **rayon spectral** $\rho(A)$ de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par la relation

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} |\lambda|.$$

PARTIE A. Étude d'une norme matricielle.

1. Vérifier que N est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2.a. Pour tout $X \in \mathbb{C}^n$, prouver la relation $\|AX\|_1 \leq N(A) \cdot \|X\|_1$.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit $s \in \llbracket 1, n \rrbracket$ un indice pour lequel $\sum_{i=1}^n |a_{i,s}| = N(A)$. Calculer $\|AE_s\|_1$, où E_s est le s -ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

c. En déduire que $N(A) = \max_{X \in S_n} \|AX\|_1$, et aussi que $N(A) = \max_{X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1}$.

3. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $N(AB) \leq N(A) \cdot N(B)$.

PARTIE B. Des calculs préliminaires.

4. On considère une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour tout réel strictement positif t , on considère la matrice $B(t) = D_t A D_t^{-1}$. Expliciter les coefficients $b_{i,j}(t)$ de la matrice $B(t)$ en fonction de t et des $a_{i,j}$. On rappelle que la multiplication à droite ou à gauche par une matrice diagonale peut être interprétée en termes d'opérations élémentaires.

5. On considère dans cette question une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On suppose que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad |a_{i,i}| < 1$.

- a. Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} D_t A D_t^{-1}$.
- b. Montrer qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $N(D_{t_0} A D_{t_0}^{-1}) < 1$.
- c. En utilisant la question 3., montrer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} N(D_{t_0} A^k D_{t_0}^{-1}) = 0$.
- d. En déduire que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers la matrice nulle 0_n .

PARTIE C. Propriétés du rayon spectral.

6. Déterminer le rayon spectral des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad E = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

7. Dire, en justifiant brièvement la réponse, si les assertions suivantes sont exactes quels que soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $\mu \in \mathbb{C}$.

- (a): $\rho(\mu A) = |\mu| \rho(A)$.
- (b): $\rho(A + B) \leq \rho(A) + \rho(B)$.
- (c): $\rho(AB) \leq \rho(A) \rho(B)$.
- (d): $\forall P \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \quad \rho(P^{-1} A P) = \rho(A)$.
- (e): $\rho(A^\top) = \rho(A)$.

8. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\rho(A) \leq N(A)$.

9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $N(A^k) \geq \rho(A)^k$.

10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0_n \iff \rho(A) < 1$.

11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit α un réel strictement positif. Montrer l'équivalence

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{A}{\alpha} \right)^k = 0_n \iff \alpha > \rho(A) .$$

12. Prouver la relation

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} (N(A^k))^{1/k} = \rho(A) .$$

13. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $b_{i,j} = |a_{i,j}|$. Prouver l'inégalité

$$\rho(A) \leq \rho(B) .$$

PROBLÈME 2

Un joueur effectue n lancers d'une pièce équilibrée. Il gagne un euro à chaque fois que la pièce tombe sur pile, il en perd un à chaque fois qu'elle tombe sur face. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la variable aléatoire X_i représente le gain du joueur à l'issue du i -ième lancer, cette variable X_i prend donc pour valeurs les nombres -1 et 1 de façon équiprobable.

On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ le gain algébrique du joueur à l'issue de la partie. On s'intéresse à une estimation de l'espérance de la variable aléatoire $|S_n|$, valeur absolue du gain du joueur lors de la partie. Les variables X_i sont (bien sûr) supposées indépendantes.

PARTIE A. Majoration de cette espérance.

1. Déterminer l'espérance $E(X_1)$ et la variance $V(X_1)$ de la variable X_1 .
2. En déduire l'espérance et la variance de S_n .
3. Préciser la loi de la variable X_i^2 ($1 \leq i \leq n$), et celle de la variable $X_i X_j$ ($i \neq j$).
4. En déduire l'espérance de la variable S_n^2 .
5. À l'aide de la formule de Koenig-Huygens, montrer que $E(|S_n|) \leq \sqrt{n}$.

PARTIE B. Obtention d'un équivalent.

6. Justifier que $E(|S_n|) = \sum_{k=1}^n k P(|S_n| = k)$.
7. Pour $k \geq 2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, prouver la relation

$$P(|S_{n+1}| = k) = \frac{1}{2} \left(P(|S_n| = k-1) + P(|S_n| = k+1) \right).$$

8. Exprimer $P(|S_{n+1}| = 1)$ en fonction de $P(S_n = 0)$ et de $P(|S_n| = 2)$.
9. En déduire que $E(|S_{n+1}|) = E(|S_n|) + P(S_n = 0)$.
10. Déterminer $P(S_{2p} = 0)$ et $P(S_{2p+1} = 0)$, pour $p \in \mathbb{N}$.
11. Prouver par récurrence la relation

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad E(|S_{2p+1}|) = \frac{p+1}{4^p} \binom{2p+1}{p}.$$

12. En déduire un équivalent de $E(|S_{2p+1}|)$ lorsque $p \rightarrow +\infty$, puis de $E(|S_n|)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

PARTIE C. Minoration.

13. Soient T et U deux variables aléatoires réelles indépendantes sur un univers fini Ω , on suppose que la variable U est symétrique par rapport à l'origine, c'est-à-dire que U et $-U$ ont la même loi. Montrer que $E(\cos(T+U)) = E(\cos(T)) E(\cos(U))$.
14. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout réel t , on a $E(\cos(t S_n)) = \cos^n(t)$.
15. Montrer alors que, pour tout t réel, $E(|S_n|) \geq n \cos^{n-1}(t) \sin(t)$.
16. Déterminer le maximum de $t \mapsto n \cos^{n-1}(t) \sin(t)$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
17. En déduire que $E(|S_n|) \geq \sqrt{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}$.
18. Donner un équivalent de $M_n = \sqrt{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, et comparer avec l'estimation obtenue à la question 12.