DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 5
COMMENTAIRES
PSI2 2025-2026

Un problème regroupant des choses classiques: des séries entières associées à des questions de dénombrement.

La rédaction des questions de dénombrement est parfois imparfaite, elle montre chez certains des difficultés d'expression en langue française écrite, chez d'autres des raisonnements confus. Lorsqu'un travail demande un peu de rédaction (c'est tout particulièrement le cas en mathématiques lorsqu'il y a du dénombrement ou des probabilités), je vous conseille vivement de vous relire attentivement, et de vous assurer que ce que vous avez écrit a bien un sens.

A.2 Certaines copies se contentent d'afficher les résultats: $d_1 = 0$, $d_2 = 1$, $d_3 = 2$. Il me semble que cette question exigeait que les dérangements pour n valant 1, 2 ou 3, soient explicités, ce qui est fait dans peu de copies.

A.6. N'oubliez pas que les comparaisons de rayons de convergence reposent sur des comparaisons de séries **à termes positifs**, il est donc nécessaire de précéder la majoration $\dfrac{d_n}{n!} \leq 1$ de l'inégalité $0 \leq$, ou alors de mettre une valeur absolue.

Par ailleurs, les comparaisons doivent être écrites entre les coefficients des séries entières, et non entre des sommes imprécises: par exemple écrire que $\displaystyle\sum \frac{d_n}{n!} x^n \leq \sum x^n$ ne veut rien dire!

A.8. L'affirmation $R = 1$ est souvent donnée sans justification.

B.1. Évitez de parachuter une formule improbable et de dire "je vais démontrer ça par récurrence", ce n'est pas joli. Il me semble que l'énoncé dirigeait vers l'utilisation de la formule de Leibniz.

B.2. Quelques calculs très maladroits, il suffisait de voir que $d_n = f^{(n)}(0) = s^{(n)}(0)$ puisque la définition même de la fonction s montre que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!} x^n$ est la série de Taylor de s, donc de f.

On pouvait aussi obtenir la relation demandée assez rapidement en développant la relation $(1 - x)\, s(x) = e^{-x}$ et en utilisant l'unicité du DSE.

B.3 Peut s'obtenir par récurrence et télescopage à partir de **B.2.**, mézôssi par produit de Cauchy en remarquant que $s(x) = e^{-x} \times \dfrac{1}{1-x}$.

B.5. Un certain nombre de confusions et de choses peu rigoureuses dans cette question. On ne demande pas ici de montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 1} s(x) = +\infty$ (même si le résultat est vrai, et a bien sûr un lien avec la question posée), on demande seulement de savoir si $s(1)$ et $s(-1)$ sont définis, autrement dit si les séries $\displaystyle\sum \frac{d_n}{n!}$ et $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n d_n}{n!}$ convergent. Or, il est clair qu'elles sont toutes deux grossièrement divergentes.

C.1. En fait, $X(\Omega) = [\![1, n]\!] \setminus \{n-1\}$ puisqu'une permutation de $[\![1, n]\!]$ ne peut pas avoir exactement $n - 1$ points fixes, mais ce n'est pas bien grave...

D.1. Lorsque vous invoquez le théorème spécial des séries alternées, par exemple pour majorer la valeur absolue du reste, vous devez impérativement rappeler les hypothèses de ce théorème.

D.2. La conclusion n'est pas toujours claire. Vous procédez souvent par un raisonnement par l'absurde, il faut donc faire apparaître une contradiction, mais pour cela il faudrait expliquer pourquoi δ_n ne peut jamais être nul...

D.4. Certains oublient de mentionner que $|\delta_n|$ tend vers zéro. Eh oui, toujours les hypothèses du TSSA!

E.2. *cf.* remarques sur la question **A.6.**

E.5. Cette relation s'obtient en développant un produit de Cauchy de deux séries entières, mais il faut le faire avec soin car l'une des deux séries entières ne comporte que des termes de degré pair ce qui oblige à manipuler précautionneusement les indices, *cf.* corrigé. Un certain nombre de démonstrations sont peu convaincantes, les manipulations d'indices étant assez fumeuses.

On peut aussi obtenir la formule demandée par un raisonnement de dénombrement. En effet, il est facile de voir (surtout si l'on a fait une MPSI) que les involutions de $[\![1, n]\!]$ sont exactement les permutations que l'on peut décomposer en un produit de transpositions à supports disjoints. Pour en construire une, il faut donc choisir k paires disjointes d'éléments de $[\![1, n]\!]$, avec $0 \leq k \leq N = \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$, et compter combien il y a de façons de faire un tel choix.