Équations linéaires scalaires d'ordre un.

1. Résoudre, sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$, l'équation différentielle

$$(\mathbf{E}) \quad : \quad x\,y' - 2y = 0\ .$$

Quelles sont les solutions de **(E)** sur $\mathbb{R}$? Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des solutions de **(E)** sur $\mathbb{R}$?

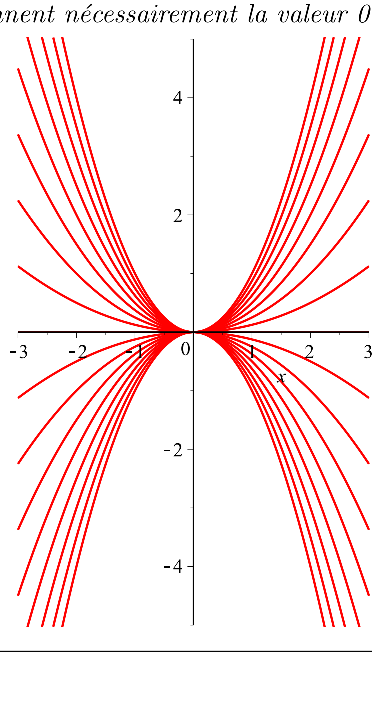
- -

• Sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$, l'équation peut se mettre **sous forme normale** (i.e. on peut isoler y'): $y' = \dfrac{2}{x}y$, on peut alors la résoudre: $y = C\,e^{2\ln|x|} = C\,|x|^2 = C\,x^2$, où C est une constante arbitraire. Sur chacun de ces deux intervalles, l'ensemble des solutions est une droite vectorielle.

• Si y est une fonction solution de **(E)** sur $\mathbb{R}$, alors y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et y est solution de **(E)** sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$; il existe alors deux constantes C_1 et C_2 telles que $y = C_1x^2$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $y = C_2x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Réciproquement, si une fonction y est définie de cette façon, avec C_1 et C_2 deux constantes quelconques, alors y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$: en effet, le seul problème est celui du raccordement en zéro, et on vérifie que y est dérivable à gauche et à droite en 0, les dérivées à gauche et à droite étant toutes les deux nulles, finalement y est dérivable en 0 de dérivée nulle, puis y' (égale à $2C_1x$ sur $\mathbb{R}_-^*$, à $2C_2x$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et nulle en 0) est continue sur $\mathbb{R}$, donc y est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et est solution de **(E)** sur $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ des solutions de **(E)** sur $\mathbb{R}$ est donc de dimension 2, puisque c'est l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions y_1 et y_2, avec

$$y_1 : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad y_2 : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \ .$$

On obtient ainsi une courbe intégrale de **(E)** *sur* $\mathbb{R}$ *en prenant la réunion de deux quelconques demi-paraboles sur le schéma ci-dessous. Le théorème de Cauchy linéaire ne s'applique pas à cette équation différentielle sur* $\mathbb{R}$ *puisqu'au point 0, toutes les fonctions* y *solutions prennent nécessairement la valeur 0.*



2. Résoudre, sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, l'équation différentielle $(\mathbf{E}) : y' - (\tan x)y + \cos^2 x = 0$.

- -

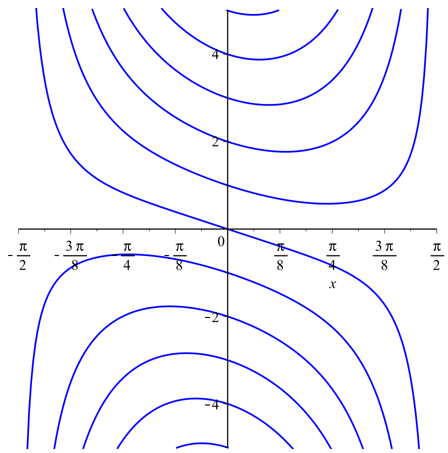
On peut commencer par résoudre l'équation homogène associée $y' = \tan(x) \cdot y = -\frac{-\sin(x)}{\cos(x)} y$, dont on sait que les solutions sur I sont les fonctions $y_H : x \mapsto \lambda\, e^{-\ln(\cos x)} = \frac{\lambda}{\cos(x)}$, avec λ réel.

On applique alors la méthode de variation de la constante, qui consiste à rechercher les solutions de **(E)** sous la forme $y(x) = \frac{\lambda(x)}{\cos(x)}$, où λ est une nouvelle fonction inconnue, supposée de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. On dérive et on réinjecte dans **(E)**. Après simplification, il reste $\lambda'(x) = -\cos^3(x)$, fonction dont il ne reste plus qu'à chercher des primitives. C'est facile (pas besoin de linéariser!) puisque $-\cos^3(x) = \cos(x) \cdot (\sin^2 x - 1)$, on obtient donc immédiatement $\lambda(x) = \frac{1}{3} \sin^3(x) - \sin(x) + C$, soit

$$y(x) = \frac{1}{3} \frac{\sin^3(x)}{\cos(x)} - \tan(x) + \frac{C}{\cos(x)} \quad , \qquad \text{avec} \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Remarque. Si on veut éviter de faire varier la constante (*il y a en effet des constantes très fragiles qui supportent difficilement qu'on les fasse varier, ce qui est contraire à leur nature*), on peut remarquer que

$$\begin{aligned}
(\mathbf{E}) \quad &\iff \quad \frac{\cos(x)\, y'(x) - \sin(x)\, y(x)}{\cos(x)} = -\cos^2(x) \\
&\iff \quad \frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\cos(x)\, y(x)\big) = -\cos^2(x) \\
&\iff \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\cos(x)\, y(x)\big) = -\cos^3(x) \\
&\iff \quad \cos(x)\, y(x) = \frac{1}{3} \sin^3(x) - \sin(x) + C \\
&\iff \quad y(x) = \frac{1}{3} \frac{\sin^3(x)}{\cos(x)} - \tan(x) + \frac{C}{\cos(x)}\ .
\end{aligned}$$



---

3. Montrer que l'équation différentielle **(E)** : $xy' + y = \tan(x)$ admet une unique solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle ouvert $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

- -

Sur I, on a $(\mathbf{E}) \iff (xy)' = \tan x \iff (xy)' = -\dfrac{-\sin x}{\cos x} \iff xy = -\ln(\cos x) + C$. Mais pour exprimer y, il faut diviser par x. Pour employer les termes du cours, on ne peut mettre l'équation **(E)** sous forme normale que sur $I_1 = \left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[$ ou sur $I_2 = \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, et c'est seulement sur chacun de ces deux sous-intervalles que le théorème de Cauchy linéaire s'applique, pour affirmer que l'ensemble des solutions de **(E)** est une droite affine.

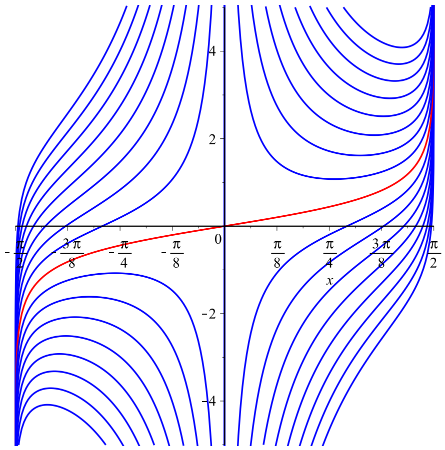
Si y est solution de **(E)** sur I, on a donc

$$(*) \qquad y(x) = \begin{cases} \dfrac{-\ln(\cos x) + C_1}{x} & \text{pour} \quad x \in I_1 \\ \dfrac{-\ln(\cos x) + C_2}{x} & \text{pour} \quad x \in I_2 \end{cases} .$$

Il s'agit d'exprimer les conditions sur C_1 et C_2 pour que cela se raccorde en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. De $\cos x - 1 \sim -\dfrac{x^2}{2}$ et $\ln(1+x) \sim x$ au voisinage de zéro, par composition, on tire $\ln(\cos x) \sim -\dfrac{x^2}{2}$. Donc, si C est une constante arbitraire, on a le développement asymptotique

$$\frac{-\ln(\cos x) + C}{x} = \frac{C}{x} + \frac{x}{2} + o(x) \qquad \text{au voisinage de zéro} .$$

Pour que y, définie par **(*)** ci-dessus, se prolonge en une fonction continue en 0, il est donc nécessaire que $C_1 = C_2 = 0$. La condition est suffisante puisque la fonction $y : x \mapsto -\dfrac{\ln(\cos x)}{x}$, prolongée par $y(0) = 0$, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I: elle est continue sur I (grâce au DL en 0), $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{0\}$ et sa dérivée admet une limite finie en zéro (on le voit en écrivant par exemple $y' = \dfrac{\tan x}{x} - \dfrac{y}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$ d'après le DL obtenu), elle est donc bien $\mathcal{C}^1$ sur I par le théorème de la limite de la dérivée. En rouge, la seule courbe intégrale correspondant à une solution sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.



---

4. Soit l'endomorphisme Φ de $\mathbb{R}[X]$ défini par $\Phi(P) = (2X+1)P - (X^2-1)P'$. Déterminer les éléments propres de Φ.

- -

Il s'agit de chercher pour quelles valeurs du paramètre réel λ l'équation différentielle

$$(E_\lambda) \quad : \quad (2x+1)\,y - (x^2-1)\,y' = \lambda\,y$$

admet des solutions polynomiales non triviales (i.e. autres que la fonction nulle). Cette équation (E_λ) s'écrit encore

$$(x^2-1)\,y' - (2x+1-\lambda)\,y = 0$$

et on la résout sur chacun des intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ et $]1, +\infty[$. Elle s'écrit alors

$$y' = \frac{2x+1-\lambda}{x^2-1}\,y \qquad \text{ou} \qquad y' = \left(\frac{1+\lambda}{2(x+1)} + \frac{3-\lambda}{2(x-1)}\right) y\,,$$

et les solutions sont $y = C\,|x+1|^{\frac{1+\lambda}{2}}\,|x-1|^{\frac{3-\lambda}{2}}$.

On trouvera alors des solutions polynomiales lorsque les exposants $\frac{1+\lambda}{2}$ et $\frac{3-\lambda}{2}$ sont des entiers naturels, ce qui impose que λ soit un entier relatif impair avec $-1 \leq \lambda \leq 3$; il y a trois valeurs acceptables de λ qui sont donc les trois valeurs propres de Φ :

- $\lambda = -1$: le sous-espace propre associé est la droite $E_{-1} = \mathbb{R}\,(X-1)^2$;
- $\lambda = 1$, avec $E_1 = \mathbb{R}\,(X^2-1)$;
- $\lambda = 3$, avec $E_3 = \mathbb{R}\,(X+1)^2$.

---

5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f'(x) + f(x)\big) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. *En posant $u = f + f'$, on écrira que f vérifie l'équation différentielle $y' + y = u$, dont on exprimera les solutions sous forme intégrale.*

- -

En posant $u = f + f'$, la fonction f est solution de l'équation différentielle $y' + y = u(x)$. Oui, je sais, ça paraît bête... mais ça permet d'exprimer $f(x)$ sous la forme d'une intégrale dans laquelle intervient la fonction $u = f' + f$. Par la méthode de variation de la constante (*détails laissés au lecteur*), ou en écrivant que $y'(x) + y(x) = e^{-x}\,\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(y(x)\,e^x\big)$, on obtient f sous la forme

$$f(x) = K\,e^{-x} + e^{-x}\int_0^x u(t)\,e^t\,\mathrm{d}t\ ,$$

avec toujours $u = f' + f$. On sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = 0$. Fixons un $\varepsilon > 0$, il existe alors $A > 0$ tel que $t \geq A \Longrightarrow |u(t)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour tout réel x tel que $x > A$, on peut écrire

$$f(x) = K'\,e^{-x} + e^{-x}\int_A^x u(t)\,e^t\,\mathrm{d}t\ , \qquad \textbf{(*)}$$

où $K' = K + \displaystyle\int_0^A u(t)\,e^t\,\mathrm{d}t$ est un réel fixé (indépendant de x). Le terme $K'\,e^{-x}$ tend vers zéro, il existe donc un réel B tel que $x \geq B \Longrightarrow |K'\,e^{-x}| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. On majore l'autre terme (en valeur absolue) :

$$\left|e^{-x}\int_A^x u(t)\,e^t\,\mathrm{d}t\right| \leq e^{-x}\int_A^x |u(t)|\,e^t\,\mathrm{d}t \leq \frac{\varepsilon}{2}\,e^{-x}\,\big(e^x - e^A\big) \leq \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Enfin, de **(*)** et de l'inégalité triangulaire, on déduit que, pour $x \geq \max\{A, B\}$, on a $|f(x)| \leq \varepsilon$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

---

6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue et 2π-périodique. Montrer que l'équation **(E)**: $y' - y = f(x)$ admet une unique solution 2π-périodique y_0, puis montrer que y_0 est la seule solution de **(E)** bornée sur $\mathbb{R}$.

- -

Les solutions de **(E)** peuvent par exemple s'exprimer sous forme intégrale (*cf.* cours) :

$$y = A\,e^x + e^x\int_0^x f(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t\ .$$

On a alors

$$\begin{aligned}
y(x+2\pi) &= e^{2\pi}\,e^x\left(A + \int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t + \int_{2\pi}^{x+2\pi} f(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t\right)\\
&= e^{2\pi}\,e^x\left(A + \int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t\right) + e^{2\pi}\,e^x\int_0^x f(u+2\pi)\,e^{-u-2\pi}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

$$= \quad e^{2\pi}\left(A+\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t\right)e^x + e^x\int_0^x f(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t\ .$$

La fonction solution y est 2π-périodique si et seulement si $e^{2\pi}\left(A+\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t\right)=A$, c'est-à-dire **ssi** $A=\dfrac{-1}{1-e^{-2\pi}}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$. La (seule) solution 2π-périodique de **(E)** est donc la fonction

$$y_0 = e^x\left(\frac{-1}{1-e^{-2\pi}}\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t + \int_0^x f(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t\right)\ .$$

Cette fonction y_0, étant continue et 2π-périodique, est évidemment bornée sur $\mathbb{R}$. Les autres solutions de **(E)**, de la forme $y=y_0+K\,e^x$, avec $K\neq 0$, sont donc non bornées sur $\mathbb{R}$ puisque la fonction exponentielle n'est pas bornée.

Équations linéaires scalaires d'ordre deux.

7. Résoudre l'équation différentielle $y''+y'-2y=x\,e^{2x}$.

- -

• L'équation sans second membre **(E0)** est linéaire, à coefficients constants, elle se résout donc en passant par l'équation caractéristique $r^2+r-2=0$, qui admet pour racines -2 et 1. Les solutions de **(E0)** sont donc $y=A\,e^{-2x}+B\,e^x$.

• On recherche une solution particulière de **(E)** sous la forme $y=(ax+b)\,e^{2x}$, on réinjecte et on trouve $a=\dfrac{1}{4}$ et $b=-\dfrac{5}{16}$. Finalement, les solutions de **(E)** sont

$$y=A\,e^{-2x}+B\,e^x+\left(\frac{1}{4}\,x-\frac{5}{16}\right)e^{2x}\ .$$

NB: On peut préférer poser dès le départ le changement de fonction inconnue $y(x)=z(x)e^{2x}$, ce qui nous conduit après calculs à l'équation différentielle $z''+5z'+4z=x$, dont on cherchera une solution particulière sous la forme $z(x)=Ax+B$ (fonction affine).

---

8. En recherchant les solutions développables en série entière, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$\textbf{(E)}:\qquad (1+x^2)\,y''+4x\,y'+2y=0\ .$$

- -

Bôf, à bas les calculs, soyons astucieux!

$$\begin{aligned}
\textbf{(E)} &\iff \big((1+x^2)y''+2xy'\big)+2\,\big(xy'+y\big)=0\\
&\iff \big((1+x^2)y'\big)'+2\,(xy)'=0\\
&\iff (1+x^2)y'+2xy=C\\
&\iff \big((1+x^2)y\big)'=C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iff (1+x^2)y = Cx+D \\ &\iff y = \frac{Cx+D}{1+x^2}\ , \end{aligned}$$

où C et D sont deux constantes arbitraires.

---

9. Résoudre l'équation différentielle $x^2\,y'' + x\,y' - y = 2x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en utilisant le changement de variable $x = e^t$.

- -

Posons $y(x) = z(t)$, avec $x = e^t$, autrement dit $y(x) = z(\ln x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, ou encore, avec des notations plus symboliques, $y = z \circ \ln$, fonction composée. Alors $y'(x) = \dfrac{1}{x}\, z'(\ln x)$, puis

$$y''(x) = -\frac{1}{x^2}\, z'(\ln x) + \frac{1}{x^2}\, z''(\ln x)\ .$$

On réinjecte dans **(E)** :

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}) \quad &\iff \quad z''(\ln x) - z'(\ln x) + z'(\ln x) - z(\ln x) = 2x \\ &\iff \quad z''(t) - z(t) = 2\,e^t \\ &\iff \quad z(t) = (t+A)\,e^t + B\,e^{-t} \\ &\iff \quad y(x) = (A + \ln x)\,x + \frac{B}{x}\ . \end{aligned}$$

---

10. Résoudre l'équation différentielle $(1+x^2)\,y'' - 2y = 0$. *On commencera par chercher des solutions polynomiales.*

- -

• Commençons par déterminer le degré d'une éventuelle solution polynomiale : supposons que $y = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, avec $a_n \neq 0$, soit solution de **(E)** ; en examinant le terme de degré n, on a la relation $\big[n(n-1)-2\big]\,a_n = 0$ donc, puisque a_n est non nul, $n^2 - n - 2 = 0$, ce qui donne $n = -1$ (évidemment absurde) ou $n = 2$. *Moralité* : si **(E)** admet une solution polynomiale non triviale (i.e. non nulle), alors celle-ci est de degré deux.

• Recherchons donc une solution de **(E)** sous la forme $y = ax^2 + bx + c$. Les calculs sont laissés à l'insatiable lecteur, on trouve $b = 0$ et $a = c$, autrement dit les solutions polynomiales de **(E)** sont de la forme $y = a(x^2+1)$, avec a réel arbitraire.

• La fonction $y_1 = x^2 + 1$ étant une solution de **(E)** ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$, la méthode de variation de la constante, qui consiste à faire le changement de fonction inconnue $y = y_1 z$, nous conduit à l'équation $(x^2+1)\,z'' + 4x\,z' = 0$, soit, en posant $u = z'$, à l'équation du premier ordre $(x^2+1)\,u' + 4x\,u = 0$, qui s'intègre en $u = C\,e^{-2\ln(x^2+1)} = \dfrac{C}{(x^2+1)^2}$.
Les primitives n'étant pas évidentes du premier coup d'œil, c'est parti pour un calcul d'intégrale indéfinie, avec le changement de variable $x = \tan t$ ou $t = \mathrm{Arctan}\, x$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} &= \int \frac{\mathrm{d}t}{1+\tan^2 t} = \int \cos^2 t\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int (1+\cos 2t)\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin(2t) \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Arctan}(x) + \frac{1}{4} \sin(2 \operatorname{Arctan} x) + K \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{Arctan}(x) + \frac{x}{2(1+x^2)} + K \ ,
\end{aligned}$$

après quelques manipulations trigonométriques qui ne devraient pas effrayer les valeureux Jedi que vous aspirez à devenir. Finalement, $z = C_2 \left(\operatorname{Arctan} x + \dfrac{x}{1+x^2} \right) + C_1$, puis

$$y = C_1\,(x^2+1) + C_2 \left[x + (x^2+1)\, \operatorname{Arctan} x \right] ,$$

les fonctions $y_1 = x^2+1$ et $y_2 = x + (x^2+1) \operatorname{Arctan} x$ constituant ainsi une base de l'espace vectoriel des solutions de cette équation linéaire scalaire du second ordre, sans second membre.

---

11. En posant $z = e^{x^2} y$, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y'' + 4x\, y' + (3+4x^2)\, y = 0 \ .$$

- -

Bôf, on pose donc $y(x) = z(x)\, e^{-x^2}$ avec z de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, on en déduit successivement $y' = (z' - 2xz)\, e^{-x^2}$ puis $y'' = \big(z'' - 4xz' + (4x^2-2)z\big)\, e^{-x^2}$, on réinjecte dans l'équation qui devient miraculeusement $z'' + z = 0$. Donc $z(x) = A\, \cos(x) + B\, \sin(x)$, et enfin

$$y(x) = \big(A\, \cos(x) + B\, \sin(x)\big)\, e^{-x^2} \ .$$

---

12. Résoudre, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle $x^3 y'' + xy' - y = 0$. *On commencera par chercher une solution polynomiale non nulle.*

- -

On observe que $y = x$ est solution. On fait alors une variation de la constante en posant le changement de fonction inconnue $y(x) = xz(x)$. Cela donne $y' = z + xz'$, puis $y'' = 2z' + xz''$, on réinjecte dans l'équation qui, après une petite simplification, devient

$$x^2\, z'' + (2x+1)\, z' = 0 \ .$$

En posant $Z = z'$, on est ramené à une équation du premier ordre $x^2\, Z' + (2x+1)\, Z = 0$, ou encore $Z' = \left(-\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2} \right) Z$, qui se résout sur $\mathbb{R}_+^*$ en $Z = -C\, e^{-2\, \ln(x) + 1/x} = -\dfrac{C}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}$, que l'on intègre enfin en $z(x) = C\, e^{\frac{1}{x}} + D$. Au final, $y(x) = Cx\, e^{\frac{1}{x}} + Dx$, où C et D sont deux constantes arbitraires.

---

13. Soit l'équation différentielle $(\mathbf{E})\ :\ 4x\,y'' + 2y' - y = 0$.

a. Chercher les solutions de **(E)** développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire l'ensemble des solutions de **(E)** sur $\mathbb{R}_+^*$.

- -

a. On recherche une solution y sous la forme $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ dans un intervalle de convergence $]-R, R[$ qui sera précisé a posteriori. On a alors le droit (série entière) de dériver terme à terme: $y' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^n$, puis $y'' = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$, donc

$$xy'' = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n$$

(la dernière égalité venant simplement du fait que le terme pour $n = 0$ est nul). **Notez bien ce travail préliminaire qui consiste à faire les translations d'indices idoines pour avoir des x^n partout, avant de réinjecter dans l'équation différentielle!** Eh bien, allons-y, réinjectons!

$$\begin{aligned}
(\mathbf{E}) \quad &\iff \quad 4\sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\
&\iff \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \Big[4n(n+1)a_{n+1} + 2a_{n+1} - a_n\Big]\, x^n = 0 \\
&\iff \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \Big[(4n^2+4n+2)a_{n+1} - a_n\Big]\, x^n = 0 \\
&\iff \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (2n+1)(2n+2)a_{n+1} - a_n = 0\ ,
\end{aligned}$$

la dernière ligne (identification des coefficients) résultant de la propriété d'unicité du développement en série entière. On a donc, pour tout n entier naturel, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{(2n+1)(2n+2)}$, ce qui garantit déjà un rayon de convergence infini puisque $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ tend vers zéro. Puis on déduit facilement $a_n = \dfrac{a_0}{(2n)!}$, le coefficient a_0 restant arbitraire.

Les solutions de **(E)** développables en série entière sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions $y = a_0 y_0$, où a_0 est un réel arbitraire, et $y_0 : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(2n)!}$. On peut expliciter y_0. En effet, si $x \geq 0$, on peut écrire $x = (\sqrt{x})^2$, alors $y_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{ch}(\sqrt{x})$, et pour $x \leq 0$, on écrit $x = -\big(\sqrt{-x}\big)^2$, et alors $y_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n\big(\sqrt{-x}\big)^{2n}}{(2n)!} = \cos\big(\sqrt{-x}\big)$.

b. D'abord, constatons que, sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut mettre l'équation **sous forme normale**, c'est-à-dire isoler y'' puisque le coefficient x ne s'annule pas. Le théorème de Cauchy linéaire permet alors d'affirmer que l'ensemble des solutions de **(E)** sur cet intervalle est un plan vectoriel. Nous connaissons comme solutions pour le moment les fonctions $f = Cy_0$, où C est une constante et y_0 la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(\sqrt{x})$, qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. Faisons donc varier la constante C, c'est-à-dire recherchons les solutions de **(E)** sous la forme $y = zy_0$, où z est une fonction inconnue de classe $\mathcal{C}^2$. On dérive deux fois: $y' = z'y_0 + yz_0'$, puis $y'' = z''y_0 + 2z'y_0' + zy_0''$, et réinjectons, et tenons compte de $4xy_0'' + 2y_0' - y_0$ pour simplifier:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{E}) \quad &\Longleftrightarrow \quad 4x(z''y_0 + 2z'y_0' + zy_0'') + 2(z'y_0 + zy_0') - zy_0 = 0\\
&\Longleftrightarrow \quad z(4xy_0'' + 2y_0' - y_0) + 4xy_0z'' + 8xy_0'z' + 2y_0z' = 0\\
&\Longleftrightarrow \quad 4xy_0\, z'' + (8xy_0' + 2y_0)\, z' = 0\ .
\end{aligned}$$

Bien noter que l'on n'explicitera y_0 que le plus tard possible! Dériver deux fois $\mathrm{ch}(\sqrt{x})$ *serait fort maladroit, et on risquerait de faire des erreurs de calcul ou de ne pas voir les simplifications!* L'équation obtenue est bien sûr toujours du second ordre en la fonction inconnue z, mais en posant $u = z'$, on se ramène à une équation du premier ordre en la fonction inconnue u, que l'on sait alors résoudre. Poursuivons:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{E}) \quad &\Longleftrightarrow \quad u' = -\Big(2\frac{y_0'}{y_0} + \frac{1}{2x}\Big)\, u\\
&\Longleftrightarrow \quad u = C\, e^{-2\ln(y_0) - \frac{1}{2}\ln(x)} \quad = \quad \frac{C}{\sqrt{x}\, y_0^2}\\
&\Longleftrightarrow \quad z' = \frac{C}{\sqrt{x}\ \mathrm{ch}^2(\sqrt{x})}
\end{aligned}$$

Il reste à primitiver pour trouver z ; pour cela, écrivons une intégrale indéfinie (intégrale sans bornes, et posons le changement de variable $t = \sqrt{x}$):

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\ \mathrm{ch}^2(\sqrt{x})} = \int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{t\ \mathrm{ch}^2(t)} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}^2(t)} = 2\ \mathrm{th}(t) = 2\ \mathrm{th}(\sqrt{x}) = 2\,\frac{\mathrm{sh}(\sqrt{x})}{\mathrm{ch}(\sqrt{x})}$$

puisque la fonction tangente hyperbolique $\mathrm{th} = \dfrac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$ a pour dérivée $1 - \mathrm{th}^2 = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2}$, de même qu'il est bien connu que la fonction tangente $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ a pour dérivée $1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$.
Donc $z = 2C\ \mathrm{th}(\sqrt{x}) + C_2 = C_1\ \mathrm{th}(\sqrt{x}) + C_2$, où C_1 et C_2 sont deux constantes arbitraires. Et enfin, $y = zy_0$, donc

$$y = C_1\ \mathrm{sh}(\sqrt{x}) + C_2\ \mathrm{ch}(\sqrt{x})\ .$$

Le lecteur insatiable, au vu du résultat, pourra se dire qu'en faisant le changement de variable $t = \sqrt{x}$, l'équation est probablement ramenée à une équation plus simple! Et effectivement, en posant $y(x) = z(\sqrt{x})$, l'équation **(E)** *devient $z''(t) - z(t) = 0$, dont* **il est bien connu que** *les solutions sont les combinaisons linéaires de* ch et sh.

Systèmes différentiels linéaires

14. Résoudre le système différentiel linéaire d'écriture matricielle $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On pourra, soit utiliser la méthode générale, soit poser le changement de fonction inconnue $X(t) = e^t\, Y(t)$.

- -

Méthode 1. C'est la méthode "générale" : le système est triangulaire, on le résout en cascade, en partant de la dernière équation. En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}$, on a

$$(\mathbf{S}) \iff \begin{cases} x' = x + y \\ y' = y + z \\ z' = z + u \\ u' = u \end{cases} \iff \begin{cases} x = C_4\, e^t + C_3\, t\, e^t + C_2\, \dfrac{t^2}{2}\, e^t + C_1\, \dfrac{t^3}{6}\, e^t \\ y = C_3\, e^t + C_2\, t\, e^t + C_1\, \dfrac{t^2}{2}\, e^t \\ z = C_2\, e^t + C_1\, t\, e^t \\ u = C_1\, e^t \end{cases}.$$

En écrivant la solution générale X sous la forme

$$X = C_1 \begin{pmatrix} \dfrac{t^3}{6}\, e^t \\ \dfrac{t^2}{2}\, e^t \\ t\, e^t \\ e^t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \dfrac{t^2}{2}\, e^t \\ t\, e^t \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} t\, e^t \\ e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_4 \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

on voit que ce sont les combinaisons linéaires de quatre fonctions vectorielles X_1, X_2, X_3, X_4 qui constituent donc une base de l'espace vectoriel des solutions de $(\mathbf{S})$.

Méthode 2 (plus jolie, mais parachutée). On fait le changement de fonction inconnue $X(t) = e^t\, Y(t)$, et on a

$$(\mathbf{S}) \iff X' = AX \iff e^t\,(Y' + Y) = e^t\, AY \iff Y' = (A - I_4)\, Y \iff \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = 0 \end{cases}.$$

On en déduit $y_4 = C_1$, $y_3 = C_1 t + C_2$, $y_2 = C_1 \dfrac{t^2}{2} + C_2 t + C_3$, $y_1 = C_1 \dfrac{t^3}{6} + C_2 \dfrac{t^2}{2} + C_3 t + C_4$, et on retrouve les mêmes solutions (heureusement!)

---

15. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = 2x - y - z \\ y' = -x + 2y - z \\ z' = -x - y + 2z \end{cases}$.

- -

Le système s'écrit $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

On observe que $A - 3I_3 = -J$, où $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est la matrice dont tous les coefficients valent 1, on a donc $\mathrm{rg}(A - 3I_3) = 1$, donc $3 \in \mathrm{Sp}(A)$, et $\dim E_3(A) = 2$; en fait, il est assez clair que $E_3(A)$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$, engendré par exemple par les vecteurs $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. L'autre valeur propre de A est 0 (considérer la trace), et le sous-espace $E_0(A) = \mathrm{Ker}(A)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Tout ceci permet d'écrire que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(3, 3, 0)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ par exemple. Ensuite,

$$X' = AX \iff X' = PDP^{-1}X \iff (P^{-1}X)' = D(P^{-1}X) \iff Y' = DY$$

en posant $Y(t) = P^{-1}\,X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$.

Donc $X' = AX \iff \left\{\begin{array}{lcl} u' &=& 3u \\ v' &=& 3v \\ w' &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} u(t) &=& C_1\,e^{3t} \\ v(t) &=& C_2\,e^{3t} \\ w(t) &=& C_3 \end{array}\right.$. En remultipliant à gauche par la matrice de passage P, on termine la résolution du système:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) &=& C_1\,e^{3t} + C_3 \\ y(t) &=& (-C_1 + C_2)\,e^{3t} + C_3 \\ z(t) &=& -C_2\,e^{3t} + C_3 \end{array}\right. .$$

Problèmes se ramenant à une équation différentielle

16. Trouver toutes les applications continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$(\mathbf{F}) : \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x)\,f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

- -

• Soit f une fonction solution de **(F)**, on montre d'abord que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$: si f et la fonction nulle, c'est évident, sinon on introduit un réel a tel que $f(a) \neq 0$ et, en notant F la primitive de f qui s'annule en zéro, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{1}{f(a)} \big(F(x + a) - F(x - a)\big) \; ;$$

la fonction F étant $\mathcal{C}^1$, f l'est aussi, puis F est $\mathcal{C}^2$ et ainsi de suite, bref f est $\mathcal{C}^\infty$.

• Soit f une solution non nulle de **(F)**. On peut alors dériver l'équation fonctionnelle **(F)** soit par rapport à x, soit par rapport à y, et on en déduit les relations

$$\left\{\begin{array}{rcl} f'(x)\,f(y) & = & f(x+y)-f(x-y) \\ f(x)\,f'(y) & = & f(x+y)+f(x-y) \quad \textbf{(*)} \end{array}\right. .$$

En ajoutant ces deux équations, on obtient $f'(x)\,f(y)+f(x)\,f'(y)=2\,f(x+y)$. Dérivons de nouveau par rapport à x et par rapport à y, on obtient la relation

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \qquad f''(x)\,f(y)=f(x)\,f''(y)\ .$$

En posant $\lambda=\dfrac{f''(a)}{f(a)}$, où a est un réel tel que $f(a)\neq 0$, on a alors l'équation différentielle **(E)** : $f''-\lambda\,f=0$, équation que l'on sait résoudre en discutant suivant le signe de λ.

Notons aussi que l'équation fonctionnelle **(F)** entraîne les conditions initiales $f(0)=0$ (évident en faisant $x=y=0$) et $f'(0)=2$ (car $f(a)\,f'(0)=f(a)+f(a)$ en faisant $x=a$ et $y=0$ dans **(*)**). Suivant le signe de λ, on obtient donc :

- si $\lambda=0$, $f(x)=2x$;

- si $\lambda=\omega^2>0$, alors $f(x)=\dfrac{2}{\omega}\ \mathrm{sh}(\omega\,x)$;

- si $\lambda=-\omega^2<0$, alors $f(x)=\dfrac{2}{\omega}\ \sin(\omega\,x)$.

On vérifie ensuite, en reportant dans **(F)**, que ces fonctions conviennent.

---

17. Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dérivables, telles que

$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad f'(x)=x\,f(-x)\ .$$

- -

Rappelons que toute fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se décompose **de façon unique** en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Recherchons alors f sous la forme $f=g+h$, avec g paire et h impaire. Comme $g(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $h(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$, il est clair que g et h sont toutes deux dérivables. On obtient

$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad g'(x)+h'(x)=x\,g(x)-x\,h(x)\ .$$

La propriété d'unicité mentionnée ci-dessus permet d'identifier les parties paire et impaire, autrement dit d'obtenir deux équations différentielles indépendantes :

$$(\mathbf{E})\ :\quad g'(x)=x\,g(x) \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad (\mathbf{F})\ :\quad h'(x)=-x\,h(x)\ .$$

On résout **(E)**, cela donne $g(x)=A\,e^{\frac{x^2}{2}}$, et les fonctions obtenues sont bien des fonctions paires. On résout **(F)**, cela donne $h(x)=B\,e^{-\frac{x^2}{2}}$ ... mais la fonction obtenue n'est impaire que si $B=0$! Au final, $f(x)=A\,e^{\frac{x^2}{2}}$, avec $A\in\mathbb{R}$ arbitraire.

---

18. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, dérivables, telles que $(\mathbf{F}) : \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
On montrera que f est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre, puis on posera le changement de variable $x = e^t$.

- -

Si f est solution de l'équation fonctionnelle **(F)**, alors f' est dérivable, donc f est deux fois dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut donc redériver l'équation, ce qui donne

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2}\, f'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}\, f(x)\ ,$$

donc f est solution de l'équation différentielle **(E)** : $x^2\, y'' + y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En posant $g(t) = f(e^t)$ pour $t \in \mathbb{R}$, on voit que f est solution de **(E)** sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si g est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $z'' - z' + z = 0$. L'équation caractéristique associée $r^2 - r + 1 = 0$ admet pour racines $r_1 = \dfrac{1}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1}{2} - i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Donc g est de la forme

$$g(t) = e^{\frac{t}{2}}\,\left(A\,\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + B\,\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\ .$$

On peut en déduire une expression de f, mais il y aura alors une réciproque à faire, pas si facile à écrire (en dérivant l'équation fonctionnelle **(F)**, on n'a pas raisonné par équivalences, mais seulement par conditions nécessaires). Il est en fait ici préférable de remarquer que le changement de variable proposé par l'énoncé montre que l'équation fonctionnelle **(F)** équivaut à la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \frac{1}{x}\, g'(\ln x) = g\left(\ln\frac{1}{x}\right)\ ,$$

soit encore à la relation

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad g'(t) = e^t\, g(-t)\ .$$

En reprenant l'expression de g obtenue ci-dessus, on note que cela impose la relation $A = B\,\sqrt{3}$. En revenant à la variable x, on obtient donc l'expression des solutions

$$f(x) = C\,\sqrt{x}\left(\sqrt{3}\,\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\ln x\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\ln x\right)\right)\ ,$$

ou encore

$$f(x) = 2\,C\,\sqrt{x}\,\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\ln x\right)\ ,$$

avec $C \in \mathbb{R}$ constante arbitraire.

---

19. Soit λ un réel, soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer les fonctions $u : [0,1] \to \mathbb{R}$, continues, telles que

$$\forall x \in [0,1] \qquad u(x) = \lambda \int_0^x u(t)\,\mathrm{d}t + f(x)\ .$$

- -

Soit u solution du problème posé. Soit U sa primitive qui s'annule en 0, qui est donc définie par $U(x) = \displaystyle\int_0^x u(t)\,\mathrm{d}t$. Alors U est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, et elle est solution du problème de Cauchy **(P)**: $\begin{cases} U'(x) - \lambda U(x) &= f(x) \\ \quad U(0) &= 0 \end{cases}$. La solution de ce problème de Cauchy s'obtient par exemple en écrivant que $U'(x) - \lambda U(x) = e^{\lambda x}\,\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(e^{-\lambda x}U(x)\Big)$, on obtient, en tenant compte de la condition initiale:

$$U(x) = e^{\lambda x}\int_0^x f(t)\,e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$$

puis, en dérivant,

$$u(x) = U'(x) = \lambda\,e^{\lambda x}\int_0^x f(t)\,e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t + f(x)\;.$$

Inversement, la fonction u donnée par cette formule est bien solution du problème posé, elle est effectivement continue sur $[0,1]$, et on reconnaît dans son expression la dérivée de $U : x \mapsto e^{\lambda x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$, qui est solution de $U' - \lambda U = f(x)$.

---

20. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) - 2\int_0^x f(t)\,\cos(x-t)\,\mathrm{d}t = 1\;.$$

- -

L'idée pour résoudre cette "équation intégrale" est de la dériver pour obtenir une équation différentielle. Toutefois, en dérivant sans imposer d'autre condition, on obtiendra une condition nécessaire pour que f soit solution, mais il faudra ensuite faire une réciproque qui n'est pas toujours très aisée à écrire.

On peut alors préférer raisonner par équivalences, en utilisant le fait que, si g et h sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, on a l'équivalence

$$\textbf{(*):} \qquad f = g \iff \begin{cases} f' = g' \\ f(0) = g(0) \end{cases}\;.$$

Soit f solution du problème posé. On a alors $f(0) = 1$ et, en écrivant

$$f(x) = 1 + 2\int_0^x f(t)\,\cos(x-t)\,\mathrm{d}t = 1 + 2\,\cos(x)\int_0^x f(t)\,\cos(t)\,\mathrm{d}t + 2\,\sin(x)\int_0^x f(t)\,\sin(t)\,\mathrm{d}t\;,$$

il résulte du théorème fondamental de l'analyse que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$f'(x) = 2\,f(x) - 2\,\sin(x)\int_0^x f(t)\,\cos(t)\,\mathrm{d}t + 2\,\cos(x)\int_0^x f(t)\,\sin(t)\,\mathrm{d}t\;.$$

Ainsi, $f'(0) = 2$ et, de nouveau par le théorème fondamental de l'analyse, on voit que f' est de classe $\mathcal{C}^1$, donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2\,f'(x) - 2\,\cos(x)\int_0^x f(t)\,\cos(t)\,\mathrm{d}t - 2\,\sin(x)\int_0^x f(t)\,\sin(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 2\,f'(x) - \big(f(x) - 1\big) \end{aligned}$$

en réutilisant la première relation.

En utilisant deux fois l'équivalence **(*)** mentionnée au début de ce corrigé, on voit que f est solution du problème posé si et seulement si elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy **(P)**: $\begin{cases} y'' - 2y' + y = 1 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$. Le problème posé admet donc une solution unique.

Les solutions de l'équation différentielle homogène $y'' - 2y' + y = 0$ sont les fonctions $y = (Ax+B)e^x$. La fonction constante 1 est une solution évidente de l'équation avec second membre, donc f est de la forme $x \mapsto (Ax + B)e^x + 1$. Les conditions initiales imposent $B = 0$ et $A = 2$, donc $f(x) = 2xe^x + 1$.

Exercices avec Python

21. Soit l'équation différentielle **(E)**: $(1-x)^3\, y'' - y = 0$.

On note f l'unique solution de **(E)** sur $]-\infty, 1[$ vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

a. Justifier l'existence et l'unicité de f.

b. Tracer une approximation du graphe de f sur $[0\,;\,0{,}09]$ en utilisant la méthode d'Euler.

c. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[$.

Pour tout n entier naturel, on pose $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

d. Pour $n \geq 1$, trouver une relation de récurrence liant les coefficients a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}.

e. Avec Python, calculer a_n pour $n \in [\![0, 20]\!]$.

f. Montrer que $|a_n[\leq 4^n$ pour tout n.

g. Que peut-on en déduire concernant la fonction f ?