CORRIGÉ du DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 6
PSI2 2025-2026

PROBLÈME 1

d'après X-ENS-ESPCI 2017, filière PC

PARTIE A. Étude d'une norme matricielle.

1. On a bien $N(A) \in \mathbb{R}_+$ pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$.

- $\displaystyle\max_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|\right) = 0 \iff \forall j \in [\![1,n]\!] \quad \sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}| = 0 \iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad |a_{i,j}| = 0$, donc $N(A) = 0$ si et seulement si $A = 0_n$ (axiome de séparation).

  En effet, une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul.

- $\displaystyle N(\lambda A) = \max_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^{n}|\lambda|\,|a_{i,j}|\right) = \max_{1\leq j\leq n}\left(|\lambda|\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|\right) = |\lambda|\,N(A)$, on a donc l'axiome d'homogénéité.

- Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on a
$$\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}+b_{i,j}| \leq \sum_{i=1}^{n}\big(|a_{i,j}|+|b_{i,j}|\big) = \sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}| + \sum_{i=1}^{n}|b_{i,j}| \leq N(A)+N(B) .$$
Cette majoration étant vraie pour tout j, elle est vraie pour un indice j réalisant le maximum, on en déduit l'inégalité triangulaire $N(A+B) \leq N(A)+N(B)$.

2.a. Soit $X = (x_1,\cdots,x_n)$, alors $AX = (y_1,\cdots,y_n)$ où $\displaystyle y_i = \sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_j$ pour tout i. Donc

$$\begin{aligned}\|AX\|_1 &= \sum_{i=1}^{n}|y_i| = \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_j\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\,|x_j| = \sum_{j=1}^{n}\left(|x_j|\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|\right)\\ &\leq \sum_{j=1}^{n}|x_j|\,N(A) = N(A)\cdot\|X\|_1 .\end{aligned}$$

b. On a $AE_s = \begin{pmatrix}a_{1,s}\\ \vdots\\ a_{n,s}\end{pmatrix}$, c'est la s-ième colonne de la matrice A donc, par hypothèse,
$$\|AE_s\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|a_{i,s}| = N(A) .$$

c. • Pour $X \in S_n$, on a $\|X\|_1 = 1$ donc $\|AX\|_1 \leq N(A)$ d'après le **a.**, et le **b.** montre l'existence d'un vecteur X de S_n (prendre $X = E_s$) tel que $\|AX\|_1 = N(A)$. On a donc $N(A) = \max\limits_{X\in S_n}\|AX\|_1$.

• Pour $X \in \mathbb{C}^n$ non nul, l'inégalité du **a.** peut s'écrire $\dfrac{\|AX\|_1}{\|X\|_1} \leq N(A)$, et ce majorant $N(A)$ est atteint pour $X = E_s$, on conclut que $N(A) = \max\limits_{X\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}}\dfrac{\|AX\|_1}{\|X\|_1}$.

3. Posons $C = (c_{i,j}) = AB$, alors $\displaystyle c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}$ pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Alors, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$,

$$\sum_{i=1}^{n}|c_{i,j}| = \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}|\,|b_{k,j}|$$

$$\underset{(=)}{\leq} \sum_{k=1}^{n}\left(|b_{k,j}| \sum_{i=1}^{n}|a_{i,k}|\right) \leq N(A)\cdot\sum_{k=1}^{n}|b_{k,j}| \leq N(A)\cdot N(B) .$$

Cette majoration étant vraie pour tout j, elle est vraie pour un indice j réalisant le maximum, on a donc prouvé que $N(AB) \leq N(A)\cdot N(B)$.

Remarque. On pouvait aussi dire en utilisant la question **2.** que, pour tout $X \in S_n$, on a

$$\left\|(AB)X\right\|_1 = \left\|A(BX)\right\|_1 \leq N(A)\cdot\|BX\|_1 \leq N(A)\cdot N(B)$$

et, cette majoration étant vraie pour tout $X \in S_n$, elle est vraie pour un $X_0 \in S_n$ tel que $\left\|(AB)X_0\right\|_1 = N(AB)$, et conclure ainsi plus simplement que $N(AB) \leq N(A)\cdot N(B)$.

PARTIE B. Des calculs préliminaires.

4. Rappelons que, si $M = (m_{i,j})$ est une matrice carrée d'ordre n, si $D = \mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n)$, alors $(DM)_{i,j} = d_i m_{i,j}$ alors que $(MD)_{i,j} = d_j m_{i,j}$. *En d'autres termes, le fait de multiplier M à gauche (DM) par une matrice diagonale multiplie chaque ligne de M par le coefficient correspondant de la diagonale, alors que si on multiplie M à droite (MD), ce sont les colonnes qui sont multipliées par les coefficients diagonaux de D.*

Ici, avec $d_i = t^i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on obtient $b_{i,j}(t) = (D_tAD_t^{-1})_{i,j} = t^i a_{i,j} t^{-j} = t^{i-j}a_{i,j}$.

5.a. Les $a_{i,j}$ sont ici supposés nuls pour $i > j$. Lorsque t tend vers $+\infty$, les coefficients de $D_tAD_t^{-1}$ situés strictement au-dessus de la diagonale ($i < j$) tendent vers 0 puisqu'alors $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{i-j} = 0$, ceux de la diagonale ne dépendent pas de t. Puisque la limite d'une fonction à valeurs matricielles s'obtient coefficient par coefficient (et ne dépend pas de la norme choisie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$), on a ainsi $\lim\limits_{t\to+\infty}(D_tAD_t^{-1}) = \mathrm{diag}(a_{1,1},\cdots,a_{n,n})$.

b. Posons $\Delta = \mathrm{diag}(a_{1,1},\cdots,a_{n,n})$, on a $N(\Delta) = \max\limits_{1\leq i\leq n}|a_{i,i}| < 1$. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty}(D_tAD_t^{-1}) = \Delta$, on déduit $\lim\limits_{t\to+\infty} N(D_tAD_t^{-1}) = N(\Delta) < 1$ (par exemple parce que la norme est 1-lipschitzienne donc continue), il en résulte que $N(D_tAD_t^{-1}) < 1$ pour $t > 0$ suffisamment grand.

c. Fixons $t_0 > 0$ tel que $N(D_{t_0}AD_{t_0}^{-1}) < 1$. De la question **3.**, par une récurrence immédiate, on déduit que, pour toute matrice M et pour tout k entier naturel, on a $N(M^k) \leq \big(N(M)\big)^k$. On a donc, pour tout k entier, $0 \leq N(D_{t_0}A^kD_{t_0}^{-1}) = N\big((D_{t_0}AD_{t_0}^{-1})^k\big) \leq \big(N(D_{t_0}AD_{t_0}^{-1})\big)^k$ et, comme cette dernière suite (géométrique de raison positive et strictement inférieure à 1) tend vers 0, on déduit du théorème d'encadrement que $\lim\limits_{k\to+\infty} N(D_{t_0}A^kD_{t_0}^{-1}) = 0$.

d. On a donc, dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $\lim\limits_{k\to+\infty} D_{t_0}A^kD_{t_0}^{-1} = 0_n$ (matrice nulle).

On a prouvé ce résultat en utilisant la norme N mais, comme on est en dimension finie, on sait que le résultat ne dépend pas du choix de la norme.

L'application $\varphi : M \mapsto D_{t_0}^{-1}MD_{t_0}$, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même, est linéaire en dimension finie, donc continue. On déduit donc que $\lim\limits_{k\to+\infty}\varphi(D_{t_0}A^kD_{t_0}^{-1}) = \varphi(0_n)$, soit $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0_n$.

PARTIE C. Propriétés du rayon spectral.

6. • $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1\}$, donc $\rho(A) = 1$.

• $\mathrm{Sp}(B) = \{0\}$, donc $\rho(B) = 0$.

• $\mathrm{Sp}(C) = \{0, 1\}$, donc $\rho(C) = 1$.

• $\mathrm{Sp}(D) = \{i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\}$, donc $\rho(D) = \sqrt{2}$.

• $\chi_E = (X-1)(X-4)$, donc $\mathrm{Sp}(E) = \{1, 4\}$ et $\rho(E) = 4$.

7.a. On a $\mathrm{Sp}(\mu A) = \big\{\mu\, \lambda\ ;\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\big\}$, d'où $\rho(\mu A) = |\mu|\, \rho(A)$ est vrai.

b. En reprenant les matrices de la question **6.**, on a $\rho(B) = \rho(B^\top) = 0$, alors que la somme $B + B^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour rayon spectral 1. L'inégalité proposée est donc fausse.

c. Avec les notations de **6.**, on a $BB^\top = A$, donc $\rho(BB^\top) = \rho(A) = 1 > \rho(B)\rho(B^\top) = 0$, l'inégalité proposée est fausse aussi.

d. Deux matrices semblables ont le même spectre, donc le même rayon spectral, on a donc bien $\rho(P^{-1}AP) = \rho(A)$.

e. Une matrice et sa transposée ont le même spectre, donc le même rayon spectral, on a donc bien $\rho(A^\top) = \rho(A)$.

8. Soit λ une valeur propre de A, et $X \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé, i.e. $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$. On a alors $\|AX\|_1 = \|\lambda X\|_1 = |\lambda|\, \|X\|_1$, mais $\|AX\|_1 \leq N(A) \cdot \|X\|_1$ d'après **2.a.** On a donc $|\lambda|\, \|X\|_1 \leq N(A) \cdot \|X\|_1$, et comme $\|X\|_1 > 0$, on déduit $|\lambda| \leq N(A)$. Ceci étant vrai pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, on conclut que $\rho(A) = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda| \leq N(A)$.

9. Ceci généralise la question précédente: soit λ une valeur propre de A telle que $|\lambda| = \rho(A)$, soit X un vecteur propre associé, alors il est classique que, pour tout k entier naturel, on a $A^k X = \lambda^k X$, donc d'après **2.c.**,

$$N(A^k) = \max_{Y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|A^k Y\|_1}{\|Y\|_1} \geq \frac{\|A^k X\|_1}{\|X\|_1} = \frac{\|\lambda^k X\|_1}{\|X\|_1} = |\lambda^k| = |\lambda|^k = \big(\rho(A)\big)^k\ .$$

10. • Si $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k = 0_n$, alors $\lim\limits_{k \to +\infty} N(A^k) = 0$, donc l'inégalité de la question **9.** entraîne $\lim\limits_{k \to +\infty} \rho(A)^k = 0$, ce qui entraîne $\rho(A) < 1$.

• Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\rho(A) < 1$. On sait que A est trigonalisable: $A = PTP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure. Les coefficients diagonaux $t_{i,i}$ de la matrice T sont les valeurs propres de A, qui vérifient par hypothèse $|t_{i,i}| < 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On déduit alors de la question **5.** que $\lim\limits_{k \to +\infty} T^k = 0_n$. Par continuité de l'application linéaire $M \mapsto PMP^{-1}$, on conclut que $A^k = PT^kP^{-1} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0_n$.

11. De **10.** et **7.a.**, on déduit immédiatement que

$$\lim_{k \to +\infty} \left(\frac{A}{\alpha}\right)^k = 0_n \iff \rho\left(\frac{A}{\alpha}\right) < 1 \iff \frac{\rho(A)}{\alpha} < 1 \iff \alpha > \rho(A)\ .$$

12. De **9.**, on déduit que $\big(N(A^k)\big)^{1/k} \geq \rho(A)$. Mais, si on se donne $\varepsilon > 0$, alors $\rho(A) + \varepsilon > \rho(A)$, la question **11.** permet alors d'affirmer que $\left(\dfrac{A}{\rho(A)+\varepsilon}\right)^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0_n$, ce qui entraîne $\dfrac{N(A^k)}{\big(\rho(A)+\varepsilon\big)^k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe alors un rang $K \in \mathbb{N}^*$ à partir duquel $\dfrac{N(A^k)}{\big(\rho(A)+\varepsilon\big)^k} \leq 1$. Pour tout $k \geq K$, on a alors $\rho(A) \leq \big(N(A^k)\big)^{1/k} \leq \rho(A) + \varepsilon$. On a ainsi prouvé que $\lim\limits_{k\to+\infty} \big(N(A^k)\big)^{1/k} = \rho(A)$.

13. Prouvons d'abord que $N(A^k) \leq N(B^k)$ pour tout k.

Posons $A^k = (a_{i,j}^{(k)})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B^k = (b_{i,j}^{(k)})_{1\leq i,j\leq n}$, montrons par récurrence la propriété

$$(\mathcal{P}_k) \quad : \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad \big|a_{i,j}^{(k)}\big| \leq b_{i,j}^{(k)} .$$

- $(\mathcal{P}_0)$ est vrai car $A^0 = B^0 = I_n$ donc $a_{i,j}^{(0)} = b_{i,j}^{(0)} = \delta_{i,j}$;
- $(\mathcal{P}_1)$ est vrai aussi car $b_{i,j}^{(1)} = b_{i,j} = \big|a_{i,j}\big| = \big|a_{i,j}^{(1)}\big|$;
- Supposons $(\mathcal{P}_k)$ vrai pour $k \in \mathbb{N}$ donné. Alors, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a

$$\left|a_{i,j}^{(k+1)}\right| = \left|\sum_{l=1}^{n} a_{i,l}^{(k)} a_{l,j}\right| \leq \sum_{l=1}^{n} \big|a_{i,l}^{(k)}\big|\,\big|a_{l,j}\big| \leq \sum_{l=1}^{n} b_{i,l}^{(k)} b_{l,j} = b_{i,j}^{(k+1)} ,$$

ce qui prouve $(\mathcal{P}_{k+1})$.

On en déduit facilement que $N(A^k) \leq N(B^k)$, puis que $\big(N(A^k)\big)^{1/k} \leq \big(N(B^k)\big)^{1/k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et, par passage à la limite, que $\rho(A) \leq \rho(B)$.

PROBLÈME 2

PARTIE A. Majoration de l'espérance de $|S_n|$.

1. On a $X_1(\Omega) = \{-1, 1\}$ avec $P(X_1 = -1) = P(X_1 = 1) = \dfrac{1}{2}$, donc

$$\mathrm{E}(X_1) = \frac{1}{2} \times (-1) + \frac{1}{2} \times 1 = 0 .$$

De plus, $X_1^2 = 1$ (variable aléatoire constante) donc $\mathrm{E}(X_1^2) = 1$, puis par la formule de Koenig-Huygens, $\mathrm{V}(X_1) = \mathrm{E}(X_1^2) - \big(\mathrm{E}(X_1)\big)^2 = 1$.

2. Les variables X_i ont toutes la même loi. Par linéarité de l'espérance, $\mathrm{E}(S_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i) = 0$.

Les variables X_i étant indépendantes, donc décorrélées, $\mathrm{V}(S_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{V}(X_i) = n$.

3. Pour tout i, $X_i^2 = 1$ (variable aléatoire constante).

Si $i \neq j$, comme X_i et X_j prennent leurs valeurs dans $\{-1, 1\}$, il en est de même du produit $X_i X_j$. Puis $\{X_i X_j = 1\} = \big(\{X_i = 1\} \cap \{X_j = 1\}\big) \sqcup \big(\{X_i = -1\} \cap \{X_j = -1\}\big)$, donc par indépendance de X_i et X_j,

$$P(X_iX_j=1)=P(X_i=1)P(X_j=1)+P(X_i=-1)P(X_j=-1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=P(X_iX_j=-1)\ .$$

Finalement, pour $i\neq j$, la variable X_iX_j a la même loi que X_i.

4. On a $S_n^2=\Big(\sum_{i=1}^n X_i\Big)^2=\sum_{i=1}^n X_i^2+\sum_{i\neq j}X_iX_j$ donc, par linéarité de l'espérance,

$$\mathrm{E}(S_n^2)=\sum_{i=1}^n \mathrm{E}(X_i^2)+\sum_{i\neq j}\mathrm{E}(X_iX_j)=n\times 1+n(n-1)\times 0=n\ .$$

5. La formule de Koenig-Huygens, appliquée à la variable $|S_n|$, donne

$$\mathrm{V}\big(|S_n|\big)=\mathrm{E}(S_n^2)-\mathrm{E}\big(|S_n|\big)^2=n-\mathrm{E}\big(|S_n|\big)^2\geq 0$$

puisqu'une variance est toujours positive. Ainsi, $\mathrm{E}\big(|S_n|\big)\leq\sqrt{n}$.

PARTIE B. Obtention d'un équivalent.

6. Comme la variable $|S_n|$ prend ses valeurs dans $[\![0,n]\!]$, ce n'est rien d'autre que la définition de l'espérance

$$\mathrm{E}\big(|S_n|\big)=\sum_{x\in|S_n|(\Omega)}x\,P\big(|S_n|=x\big)=\sum_{k=0}^n k\,P\big(|S_n|=k\big)=\sum_{k=1}^n k\,P\big(|S_n|=k\big)\ .$$

7. Remarquons d'abord que, si j est un entier relatif, on ne peut avoir $S_{n+1}=j$ que si S_n vaut $j-1$ ou $j+1$. Donc, pour $n\in\mathbb{N}^*$ et j entier relatif, par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}P(S_{n+1}=j)&=P(S_{n+1}=j\mid S_n=j-1)\ P(S_n=j-1)+P(S_{n+1}=j\mid S_n=j+1)\ P(S_n=j+1)\\&=\frac{1}{2}\times\Big(P\big(S_n=j-1\big)+P\big(S_n=j+1\big)\Big)\end{aligned}$$

puisque les deux probabilités conditionnelles intervenant dans ce calcul valent $\frac{1}{2}$.

Si $k\geq 2$, on a alors

$$P(S_{n+1}=k)=\frac{1}{2}\times\Big(P\big(S_n=k-1\big)+P\big(S_n=k+1\big)\Big)$$

et

$$P(S_{n+1}=-k)=\frac{1}{2}\times\Big(P\big(S_n=-k+1\big)+P\big(S_n=-k-1\big)\Big)\ .$$

Comme, pour $j\in\mathbb{N}^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$, l'événement $\big\{|S_n|=j\big\}$ est la réunion disjointe des événements $\{S_n=j\}$ et $\{S_n=-j\}$, en ajoutant les deux égalités ci-dessus, on obtient la relation demandée.

8. On a

$$P(S_{n+1}=1)=\frac{1}{2}\Big(P(S_n=0)+P(S_n=2)\Big)\quad\text{et}\quad P(S_{n+1}=-1)=\frac{1}{2}\Big(P(S_n=0)+P(S_n=-2)\Big)\ .$$

En ajoutant les deux relations, on obtient

$$P\big(|S_{n+1}|=1\big)=P(S_n=0)+\frac{1}{2}\,P\big(|S_n|=2\big)\ .$$

9. Calculons!

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\big(|S_{n+1}|\big) &= \sum_{k=1}^{n+1} k\, P\big(|S_{n+1}|=k\big)\\
&= \Big[P(S_n=0)+\frac{1}{2}\,P\big(|S_n|=2\big)\Big]+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1} k\,\Big[P\big(|S_n|=k-1\big)+P\big(|S_n|=k+1\big)\Big]\\
&= P(S_n=0)+\frac{1}{2}\,P\big(|S_n|=2\big)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k+1)\,P\big(|S_n|=k\big)+\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2}(k-1)\,P\big(|S_n|=k\big)\\
&= P(S_n=0)+\frac{1}{2}\,P\big(|S_n|=2\big)+P\big(|S_n|=1\big)+\frac{3}{2}\,P\big(|S_n|=2\big)+\sum_{k=3}^{n} k\,P\big(|S_n|=k\big)\\
&= P(S_n=0)+\sum_{k=1}^{n} k\,P\big(|S_n|=k\big)\\
&= P(S_n=0)+\mathrm{E}\big(|S_n|\big)\ .
\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $P\big(|S_n|=n+1\big)=P\big(|S_n|=n+2\big)=0$.

10. S_n est une somme de n entiers impairs (1 ou -1), donc S_n est de la parité de l'entier n. Ainsi, $P(S_{2p+1}=0)=0$.

L'événement $\{S_{2p}=0\}$ est réalisé si et seulement si, lors des $2p$ premiers lancers, le joueur obtient exactement p fois pile ("succès"), et donc exactement p fois face ("échecs"). On reconnaît un schéma de Bernoulli, la loi du nombre de succès lors d'une répétition de $2p$ épreuves de Bernoulli indépendantes est binomiale $\mathcal{B}\Big(2p,\dfrac{1}{2}\Big)$ puisqu'ici la probabilité de succès à chaque épreuve est $\dfrac{1}{2}$. Donc $P(S_{2p}=0)=\dbinom{2p}{p}\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^p\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^p=\dfrac{1}{4^p}\dbinom{2p}{p}$.

11. Pour $p=0$, on a $|S_1|=|X_1|=1$ (variable constante), donc $\mathrm{E}\big(|S_1|\big)=1$, ce qui correspond bien à la formule proposée pour $p=0$.

Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Supposons la relation vraie au rang $p-1$, i.e. $\mathrm{E}\big(|S_{2p-1}|\big)=\dfrac{p}{4^{p-1}}\dbinom{2p-1}{p-1}$.
Alors, en utilisant les questions **9.** et **10.**,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\big(|S_{2p+1}|\big) &= \mathrm{E}\big(|S_{2p-1}|\big)+P(S_{2p}=0)+P(S_{2p-1}=0)\\
&= \frac{p}{4^{p-1}}\binom{2p-1}{p-1}+\frac{1}{4^p}\binom{2p}{p}\\
&= \frac{p}{4^{p-1}}\,\frac{(2p-1)!}{p!\,(p-1)!}+\frac{1}{4^p}\,\frac{(2p)!}{(p!)^2}\\
&= \frac{(p+1)\times(2p+1)!}{4^p\,p!\,(p+1)!} = \frac{p+1}{4^p}\binom{2p+1}{p}
\end{aligned}$$

après quelques réarrangements.

12. Il est plus commode d'écrire $\mathrm{E}\big(|S_{2p+1}|\big)=\dfrac{2p+1}{4^p}\,\dfrac{(2p)!}{(p!)^2}$. Par la formule de Stirling, on obtient alors

$$\mathrm{E}\big(|S_{2p+1}|\big) \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{2p}{4^p}\,\frac{2\,\sqrt{\pi\,p}\left(\frac{2p}{e}\right)^{2p}}{2\pi\,p\,\left(\frac{p}{e}\right)^{2p}} = 2\,\sqrt{\frac{p}{\pi}}\ ,$$

ce que l'on peut écrire aussi $\mathrm{E}\big(|S_{2p+1}|\big) \underset{p\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2(2p+1)}{\pi}}$. D'autre part,

$$\mathrm{E}\big(|S_{2p}|\big) = \mathrm{E}\big(|S_{2p-1}|\big) \underset{p\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2(2p-1)}{\pi}} \underset{p\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2(2p)}{\pi}}$$

En réunissant les deux cas (n pair ou impair), on conclut que $\mathrm{E}\big(|S_n|\big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2n}{\pi}}$.

PARTIE C. Minoration.

13. Par les formules d'addition de la trigonométrie, $\cos(T+U) = \cos(T)\,\cos(U) - \sin(T)\,\sin(U)$. Les variables T et U étant indépendantes, il en est de même des variables $\cos(T)$ et $\cos(U)$, ainsi que des variables $\sin(T)$ et $\sin(U)$. En utilisant la linéarité de l'espérance et le fait que, si X et Y sont indépendantes alors $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$, on obtient

$$\mathrm{E}\big(\cos(T+U)\big) = \mathrm{E}\big(\cos(T)\big)\,\mathrm{E}\big(\cos(U)\big) - \mathrm{E}\big(\sin(T)\big)\,\mathrm{E}\big(\sin(U)\big)\ .$$

Enfin, si U et $-U$ ont la même loi, il en est de même de $\sin(U)$ et de $\sin(-U) = -\sin(U)$, donc $\mathrm{E}\big(\sin(U)\big) = \mathrm{E}\big(-\sin(U)\big) = -\mathrm{E}\big(\sin(U)\big)$, donc $\mathrm{E}\big(\sin(U)\big) = 0$. Au final,

$$\mathrm{E}\big(\cos(T+U)\big) = \mathrm{E}\big(\cos(T)\big)\,\mathrm{E}\big(\cos(U)\big)\ .$$

14. Comme $|S_1| = [X_1| = 1$ (variable aléatoire constante) et que la fonction cosinus est paire, $\cos(tS_1) = \cos\big(t\,|S_1|\big) = \cos(t)$, c'est aussi une variable aléatoire constante, donc $\mathrm{E}\big(\cos(tS_1)\big) = \cos(t)$, ce qui initialise une récurrence.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathrm{E}\big(\cos(tS_n)\big) = \cos^n(t)$. Alors $tS_{n+1} = t(S_n+X_{n+1}) = tS_n+tX_{n+1}$ et, les variables $X_1, \cdots, X_n, X_{n+1}$ étant indépendantes, il résulte du lemme des coalitions que les variables $tS_n = t(X_1+\cdots+X_n)$ et tX_{n+1} sont indépendantes. Comme tX_{n+1} et $-tX_{n+1}$ ont la même loi, et de même pour tS_n et $-tS_n$, on peut appliquer la question **13.**, ce qui donne

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\big(\cos(t\,S_{n+1})\big) &= \mathrm{E}\big(\cos(tS_n+tX_{n+1})\big) = \mathrm{E}\big(\cos(t\,S_n)\big)\,\mathrm{E}\big(\cos(t\,X_{n+1})\big)\\ &= \cos^n(t)\cdot\cos(t) \;=\; \cos^{n+1}(t)\ ,\end{aligned}$$

puisque X_{n+1} a la même loi que $X_1 = S_1$, donc $\mathrm{E}\big(\cos(t\,X_{n+1})\big) = \mathrm{E}\big(\cos(tS_1)\big) = \cos(t)$. La récurrence est donc achevée.

15. Pour t réel, posons $f(t) = \mathrm{E}\big(\cos(tS_n)\big)$, soit $f(t) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} P(S_n=k)\,\cos(kt)$ par la formule de transfert. On a aussi $f(t) = \cos^n(t)$. La fonction f est dérivable avec

$$f'(t) = -n\,\cos^{n-1}(t)\,\sin(t) = -\sum_{k=-n}^{n} k\,P(S_n=k)\,\sin(kt) = -\mathrm{E}\big(S_n\,\sin(tS_n)\big)\ .$$

Comme $S_n\,\sin(tS_n) \le \big|S_n\,\sin(tS_n)\big| \le |S_n|$, la croissance de l'espérance donne

$$\mathrm{E}\big(|S_n|\big) \ge \mathrm{E}\big(S_n\,\sin(tS_n)\big) = n\,\cos^{n-1}(t)\,\sin(t)\ .$$

16. Posons $g(t) = n\cos^{n-1}(t)\sin(t) = -f'(t)$. Alors $g'(t) = n\cos^{n-2}(t)\big(\cos^2(t) - (n-1)\sin^2(t)\big)$. Dans l'intervalle ouvert $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, la dérivée g' s'annule en l'unique point θ_n tel que $\cos^2(\theta_n) - (n-1)\sin^2(\theta_n) = 0$, i.e. $\tan^2(\theta_n) = \frac{1}{n-1}$, donc pour $\theta_n = \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)$. Le lecteur s'assurera que g est croissante sur $[0, \theta_n]$, décroissante sur $\left[\theta_n, \frac{\pi}{2}\right]$, donc le maximum de g sur $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est $g(\theta_n) = n\ \big(\cos(\theta_n)\big)^{n-1}\ \sin(\theta_n)$. En utilisant la relation de trigonométrie $\forall x \in \mathbb{R}\quad \cos\big(\mathrm{Arctan}(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (*que le lecteur se fera un plaisir de redémontrer*), on obtient $\cos(\theta_n) = \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$, puis $\sin(\theta_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$, et enfin

$$\max_I g = \max_{t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \big(n\ \cos^{n-1}(t)\ \sin(t)\big) = g(\theta_n) = \sqrt{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}.$$

17. On a $\mathrm{E}\big(|S_n|\big) \geq g(t)$ pour tout $t \in I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc

$$\mathrm{E}\big(|S_n|\big) \geq \max_{t\in I} g(t) = \sqrt{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}.$$

18. On a $\ln\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right) = \frac{n-1}{2}\ \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{2}\left(-\frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\right) = -\frac{1}{2} + o(1)$, donc $M_n = \sqrt{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{n-1}{2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n}{e}} = e^{-\frac{1}{2}}\ \sqrt{n}$.

On a ainsi montré en **Q17.** que $\mathrm{E}\big(|S_n|\big) \geq M_n$ pour tout n, où $M_n \underset{n\to+\infty}{\sim} C_1\sqrt{n}$ avec $C_1 = e^{-\frac{1}{2}} \simeq 0,607$, alors que l'équivalent obtenu en **Q12.** est $\mathrm{E}\big(|S_n|\big) \underset{n\to+\infty}{\sim} C_2\sqrt{n}$, avec $C_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \simeq 0,798$.