Convergence dominée et intégration terme à terme.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{n^2}\, e^{-\frac{x}{n}}$.

a. Montrer que chaque fonction f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

b. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

c. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction intégrable f.

d. Quelle remarque peut-on faire ?

2. Soit l'intégrale $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ (que l'on ne cherchera pas à calculer).

Donner un équivalent simple de $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^n}\,\mathrm{d}x$ lorsque n tend vers $+\infty$, faisant intervenir l'intégrale J.

3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t$.

4. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, avec $f(1) \neq 0$. Trouver un équivalent de $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\, f(t)\,\mathrm{d}t$.

On pourra utiliser le changement de variable $u = t^{n+1}$.

5. Pour n entier naturel, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Montrer que la suite (I_n) tend vers zéro en décroissant.

b. Montrer la convergence de la série de terme général $(-1)^n I_n$ et calculer sa somme.

6. Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles bornées. Soient c et d deux réels tels que $c < d$. On suppose que

$$\forall x \in [c,d] \qquad \lim_{n\to+\infty} \Big(a_n\, \cos(nx) + b_n\, \sin(nx)\Big) = 0\,.$$

a. Montrer que, pour tout entier n, il existe un réel φ_n tel que

$$a_n\, \cos(nx) + b_n\, \sin(nx) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\, \cos(nx + \varphi_n)\,.$$

b. Calculer $I_n = \displaystyle\int_c^d \big(a_n\, \cos(nx) + b_n\, \sin(nx)\big)^2\,\mathrm{d}x$.

c. Montrer que, à partir d'un certain rang, on a $I_n \geq \dfrac{(a_n^2 + b_n^2)(d-c)}{4}$.

d. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) tendent vers 0.

7. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Calculer $J(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, \cos(xt)\,\mathrm{d}t$ pour x réel.

8. On donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1 + e^{-t})\,\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-t})\,\mathrm{d}t$.

9.a. Sachant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, calculer $\displaystyle I_n = \int_0^{+\infty} \sqrt{t}\,e^{-nt}\,\mathrm{d}t$ pour n entier naturel non nul.

b. Prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

10*. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ continue. Comparer les natures de l'intégrale généralisée $\displaystyle J = \int_0^1 \frac{f(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$ et de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\int_0^1 t^n\,f(t)\,\mathrm{d}t$.

11. Prouver les égalités $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^x} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$ et $\displaystyle\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

12. Pour $a > 0$, montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+a}$.

Intégrales dépendant d'un paramètre.

13. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\displaystyle f(x) = \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^x\,(1+t)}$.

a. Montrer que f est définie et monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Trouver une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$. En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$, et aussi lorsque $x \to 0^+$.

14. Pour $x \geq 0$, calculer $\displaystyle g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{Arctan}(x\cdot\tan t)}{\tan t}\,\mathrm{d}t$.

15. Soit $\displaystyle g(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et expliciter $g'(x)$.

b. Calculer directement $g(1)$; en déduire la valeur de $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$.

16.a. Soit la fonction $\displaystyle g : x \mapsto \int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et écrire une équation différentielle du premier ordre vérifiée par g sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\displaystyle G = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

17. Pour $x > -1$, on pose $\displaystyle g(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,t^x\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que g est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$.

b. Calculer $g'(x)$. En déduire $g(x)$.

18. On pose $g(x) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x \sin t)\, \mathrm{d}t$.

a. Montrer que g est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre deux dont g est solution.

c. Montrer que g est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

d. À l'aide de l'équation différentielle obtenue en **b.**, obtenir ce développement.

19. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue. Montrer que $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \big(f(t)\big)^x \, \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$. En déduire $\displaystyle\lim_{x \to 0} \big(\varphi(x)\big)^{\frac{1}{x}}$.

20. On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x \, \mathrm{d}t$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition, et déterminer ses variations.

c. Pour $x \in D_f$, on pose $g(x) = (x+1)\, f(x)\, f(x+1)$. Montrer que $\forall x \in D_f \quad g(x+1) = g(x)$.

d*. Montrer que g est constante sur D_f.

21. On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} \, \mathrm{d}t$.

a. Ensemble de définition de f.

b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur D_f.

c. Donner un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

d. Donner un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 0^+.

22. Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ continues, telles que $\forall x \in I \quad u(x) < v(x)$. Soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que l'application $g : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t) \, \mathrm{d}t$ est continue sur I. *On pourra poser* $t = u(x) + s\,\big(v(x) - u(x)\big)$, *où s désigne une nouvelle variable.*

Transformées de Laplace et de Fourier. Intégrales eulériennes

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, on note Tf ou encore $\widehat{f}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad Tf(x) = \widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-ixt} \, \mathrm{d}t\ .$$

La fonction $\widehat{f} = Tf$ est la **transformée de Fourier** *de f. L'application $T : f \mapsto Tf$ est la* **transformation de Fourier**.

23. On admet $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$. Montrer que l'application $f : \alpha \mapsto f(\alpha) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-i\alpha x} \mathrm{d}x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Trouver une équation différentielle vérifiée par f, en déduire son expression.

24.a. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, montrer que sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}$, et que c'est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

b. Soit la fonction "créneau" φ définie par $\varphi(t) = 1$ si $t \in [-1, 1]$ et $\varphi(t) = 0$ sinon. Calculer sa transformée de Fourier $x \mapsto \widehat{\varphi}(x)$.

c. Soit a un réel strictement positif, soit la fonction f définie par $\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = e^{-a|t|}$. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et expliciter sa transformée de Fourier $\widehat{f}$.

d. On suppose dans cette question que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et intégrable sur $\mathbb{R}$, et que sa dérivée f' est intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{t\to-\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$, puis prouver la relation $\forall x \in \mathbb{R} \quad \widehat{f'}(x) = ix\,\widehat{f}(x)$

Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ est une fonction continue par morceaux, la **transformée de Laplace** *de f est la fonction $\mathcal{L}[f]$ définie par*

$$\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, f(t)\, \mathrm{d}t$$

pour tout réel p tel que cette intégrale est convergente.

25. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe un réel p_0 tel que la fonction $t \mapsto e^{-p_0 t}\, f(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

a. Montrer que la transformée de Laplace $\mathcal{L}[f]$ est définie et continue sur l'intervalle $[p_0, +\infty[$.

b. Montrer que la fonction $\mathcal{L}[f]$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert $]p_0, +\infty[$ et que, sur cet intervalle, on a, pour tout n entier naturel, la relation $\big(\mathcal{L}[f]\big)^{(n)} = (-1)^n\, \mathcal{L}[g_n]$, où g_n est la fonction définie par $g_n(t) = t^n\, f(t)$.

26. Théorème de la valeur finale

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, continue par morceaux, admettant une limite finie en $+\infty$: $\lim_{t\to+\infty} f(t) = l$. Montrer que la transformée $\mathcal{L}[f]$ est définie (au moins) sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\lim_{p\to 0^+} p \cdot \mathcal{L}[f](p) = l = \lim_{t\to+\infty} f(t)\ .$$

On pourra poser $x = pt$.

Exercices avec Python

27. Soit $g :]0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^x$.

a. Prolonger g par continuité en 0.

b. Représenter graphiquement g. Justifier l'allure de g au voisinage de 0. Déterminer les coordonnées du minimum.

c. Donner une valeur approchée de $I = \displaystyle\int_0^1 g(x)\, \mathrm{d}x$.

d. On admettra que $\displaystyle\int_0^1 (x\, \ln x)^n\, \mathrm{d}x = \frac{(-1)^n\, n!}{(n+1)^{n+1}}$ pour tout n entier naturel. Montrer que $I = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

e. Écrire une fonction `calcul(e)` retournant la valeur de l'intégrale I avec une précision `e` passée en argument.