DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 6
COMMENTAIRES
PSI2 2025-2026

PROBLÈME 1

Une étude du rayon spectral d'une matrice et de son lien avec une "norme subordonnée" (cas particulier d'un théorème de Gelfand), extraite d'un sujet X-ENS-ESPCI posé récemment dans la filière PC.

Dans la partie A, il y a un enchaînement de questions assez voisines les unes des autres, et qui n'ont guère posé de problèmes même si la rédaction n'en est pas toujours optimale.

5.b. Quelques réponses un peu "calculatoires" alors qu'il suffit de mentionner la continuité de la norme (qui résulte de son caractère 1-lipschitzien par le "côté obscur" de l'inégalité triangulaire).

5.d. Nombreuses erreurs d'argumentation. Il faut dire ici à un moment que, si $N(A^k)$ tend vers 0, alors A^k tend vers 0_n. Ceci n'a rien à voir avec l'axiome de séparation de la norme, ni avec la continuité de la norme! C'est simplement la définition de la convergence d'une suite dans un espace vectoriel normé: on dit en effet que (x_k) tend vers l dans un e.v.n. (E, N) lorsque $\lim\limits_{k\to+\infty} N(x_k - l) = 0$.

Il fallait par ailleurs mentionner la continuité du produit matriciel (ou bien utiliser l'inégalité démontrée en **Q3.**) pour montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} D_{t_0}A^kD_{t_0}^{-1} = 0_n$ entraîne $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0_n$.

8. et 9. Attention! Le nombre réel positif $\rho(A)$ n'est pas nécessairement valeur propre de A. En revanche, il existe une valeur propre de A dont le **module** vaut $\rho(A)$.

11. Quelques rédactions maladroites pour cette question très facile!

12. Il fallait ici revenir à la définition de la limite avec des "epsilons", ce qui a souvent été vu, mais rédigé de façon incorrecte. Quand on a prouvé que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang k_0 à partir duquel $\left|\big(N(A^k)\big)^{1/k} - \rho(A)\right| \leq \varepsilon$, on conclut directement que $\lim\limits_{k\to+\infty} \big(N(A^k)\big)^{1/k} = \rho(A)$ puisque c'est la définition de la notion de limite, **on ne dit surtout pas que l'on obtient le résultat demandé en faisant tendre ε vers zéro!**

PROBLÈME 2

Ce sujet de probabilités commence par des questions assez élémentaires, la fin est un peu plus technique.

2. Il serait bien de faire apparaître que l'indépendance des variables aléatoires est utile pour calculer la variance de la somme, mais pas pour calculer l'espérance.

7. De trop nombreuses copies traitent cette question comme s'il n'y avait pas de valeur absolue autour de S_n, c'est dommage. Bien sûr, le fait que l'on parle de $|S_{n+1}|$ et de $|S_n|$, et non pas de S_{n+1} et de S_n, complique un peu la rédaction (*lire le corrigé*). Idem pour **Q8.**

13. J'ai lu sur certaines copies que $U = -U$, ou que $\sin(U) = -\sin(U) = 0$, ce qui est faux! **Deux variables aléatoires qui ont la même loi ne sont pas forcément égales!**

14. Il me semble nécessaire ici de rédiger clairement une récurrence, et de mentionner le lemme des coalitions qui permet d'affirmer que les variables S_n et X_{n+1} sont indépendantes.

15. Le calcul de la dérivée de $t \mapsto \mathrm{E}\big(\cos(tS_n)\big)$ est rarement justifié correctement. Aucun théorème du cours ne dit que la dérivée de l'espérance est égale à l'espérance de la dérivée, il faut le prouver "à la main".