**Espaces probabilisés.**

**1.** Déterminer une distribution de probabilités $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ sur l'ensemble $\Omega = [\![1,n]\!]$, telle que la probabilité de l'événement $[\![1,k]\!]$ soit proportionnelle à $k^2$.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Une distribution de probabilités sur $\Omega$ est une suite finie $(p_i)_{1\leq i\leq n}$ de réels positifs telle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. La probabilité associée sur $\Omega$ est alors définie par $P(I) = \displaystyle\sum_{i\in I} p_i$ pour toute partie $I$ de $\Omega$. Il doit, de plus, exister un réel $\alpha$ strictement positif tel que $P\big([\![1,k]\!]\big) = \alpha k^2$ pour tout $k$, soit $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} p_i = \alpha k^2$. Pour $k = n$, on voit que nécessairement $\alpha = \dfrac{1}{n^2}$. Puis, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,

$$p_k = P\big(\{k\}\big) = P\big([\![1,k]\!]\big) - P\big([\![1,k-1]\!]\big) = \frac{1}{n^2}\left(k^2 - (k-1)^2\right) = \frac{2k-1}{n^2}\ .$$

Réciproquement, le lecteur est invité à vérifier que cette suite de nombres $(p_k)_{1\leq k\leq n}$ convient.

---

**2.** En Palombie, lorsqu'il fait soleil un jour, il fait soleil le lendemain une fois sur 10 et, lorsqu'il pleut un jour, il pleut le lendemain 6 fois sur 10.

**a.** Il a fait soleil un lundi. Quelle est la probabilité qu'il fasse soleil le jeudi qui suit ?

**b.** Sachant qu'il a fait soleil le jour $J$, on note $p_n$ la probabilité qu'il fasse soleil le jour $J+n$. Calculer $p_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n$. On pourra considérer pour tout $n$ l'événement $E_n =$ "il fait soleil le jour $J+n$" et travailler sur le vecteur-colonne $X_n = \begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(\overline{E_n}) \end{pmatrix}$.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

**a. et b.** Disons que le lundi est le jour 0. En notant $E_n$ l'événement "'il fait soleil le jour $n$", on a les relations $P(E_{n+1}|E_n) = \dfrac{1}{10}$ et $P(\overline{E_{n+1}}|\overline{E_n}) = \dfrac{3}{5}$, donc $P(E_{n+1}|\overline{E_n}) = \dfrac{2}{5}$. Pour tout entier naturel $n$, $(E_n, \overline{E_n})$ est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne donc

$$\begin{aligned} P(E_{n+1}) &= P(E_{n+1}|E_n)\,P(E_n) + P(E_{n+1}|\,\overline{E_n})\,P(\overline{E_n}) \\ &= \frac{1}{10}\,P(E_n) + \frac{2}{5}\,P(\overline{E_n}) \\ &= \frac{1}{10}\,P(E_n) + \frac{2}{5}\left(1 - P(E_n)\right) \\ &= \frac{2}{5} - \frac{3}{10}\,P(E_n)\ . \end{aligned}$$

Ainsi, s'il fait soleil le jour 0, la suite $(p_n)$, où $p_n = P(E_n)$ est la probabilité d'ensoleillement, vérifie $p_0 = 1$ et la relation de récurrence $p_{n+1} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{3}{10}\,p_n$. On reconnaît une suite arithmético-géométrique. L'équation $l = \dfrac{2}{5} - \dfrac{3}{10}\,l$ admet pour solution $l = \dfrac{4}{13}$ et, en posant $r_n = p_n - \dfrac{4}{13}$, on vérifie la relation $r_{n+1} = -\dfrac{3}{10}r_n$, d'où $r_n = \left(-\dfrac{3}{10}\right)^n r_0 = \dfrac{9}{13}\times\left(-\dfrac{3}{10}\right)^n$, puis $p_n = r_n + \dfrac{4}{13} = \dfrac{9}{13}\times\left(-\dfrac{3}{10}\right)^n + \dfrac{4}{13}$, ce qui répond à la question **b.** sans utiliser de calcul matriciel. On en déduit aussi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{4}{13} \simeq 0,308$.

Pour répondre à la question **a.**, on évalue pour $n = 3$: $p_3 = \dfrac{9}{13}\times\left(-\dfrac{3}{10}\right)^3 + \dfrac{4}{13} = \dfrac{289}{1000} =$

$0,289$. On peut retrouver ce résultat en faisant un arbre de probabilité, ils poussent bien en Palombie.

Palons peu, palombien! Passons au calcul matriciel! On a obtenu plus haut la relation $P(E_{n+1}) = \dfrac{1}{10}\, P(E_n) + \dfrac{2}{5}\, P(\overline{E_n})$, on obtient de même $P(\overline{E_{n+1}}) = \dfrac{9}{10}\, P(E_n) + \dfrac{3}{5}\, P(\overline{E_n})$. Les matrices-colonnes $X_n$ vérifient alors la relation de récurrence $X_{n+1} = AX_n$, avec $A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{10} & \dfrac{2}{5} \\ \dfrac{9}{10} & \dfrac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 \\ 0,9 & 0,6 \end{pmatrix}$. Donc $X_n = A^n X_0$ avec $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Et on diagonalise $A$, pardi! Je n'écris pas les détails de calcul, on obtient $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}\Big(-\dfrac{3}{10}, 1\Big)$ et $P = \begin{pmatrix} -1 & \dfrac{4}{9} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Après un peu de calcul, on a

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{9}{13} \times \Big(-\dfrac{3}{10}\Big)^n + \dfrac{4}{13} & -\dfrac{4}{13} \times \Big(-\dfrac{3}{10}\Big)^n + \dfrac{4}{13} \\ -\dfrac{9}{13} \times \Big(-\dfrac{3}{10}\Big)^n + \dfrac{9}{13} & \dfrac{4}{13} \times \Big(-\dfrac{3}{10}\Big)^n + \dfrac{9}{13} \end{pmatrix},$$

ce qui permet de retrouver les résultats déjà obtenus ci-dessus.

---

**3.** Une succession d'individus $A_1, \cdots, A_n$ se transmet une information binaire du type "oui" ou "non". Chaque individu $A_k$ transmet l'information qu'il a reçue avec la probabilité $p$ à l'individu $A_{k+1}$ ou la transforme en son contraire avec la probabilité $q = 1 - p$. Chaque individu se comporte indépendamment des autres. Calculer la probabilité $\pi_n$ pour que l'information reçue par $A_n$ soit identique à celle émise par $A_1$. Quelle est la limite de $\pi_n$ quand $n$ tend vers l'infini ?

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, notons $B_k$ l'événement: "l'individu $A_k$ a reçu la bonne information (celle émise par $A_1$)". On a alors $P(B_1) = 1$ et, pour $k \geq 1$, par la formule des probabilités totales:

$$\begin{aligned} \pi_{k+1} \;=\; P(B_{k+1}) &= P(B_{k+1}|B_k)\, P(B_k) + P(B_{k+1}|\overline{B_k})\, P(\overline{B_k}) \\ &= p\, P(B_k) + (1-p)\,\big(1 - P(B_k)\big) \\ &= (2p-1)\,\pi_k + (1-p)\,. \end{aligned}$$

On reconnaît une suite arithmético-géométrique. L'équation $l = (2p-1)l + (1-p)$ a pour solution $l = \dfrac{1}{2}$, donc la suite $(v_k)$ définie par $v_k = P(B_k) - \dfrac{1}{2}$ est géométrique, de raison $2p - 1$, ce que l'improbable lecteur se fera un plaisir de vérifier par le calcul. Ainsi, $v_k = (2p-1)^{k-1}v_1 = \dfrac{1}{2}(2p-1)^{k-1}$. Puis $\pi_n = P(B_n) = \dfrac{1}{2}\Big(1 + (2p-1)^{n-1}\Big)$.

Si on a $0 < p < 1$, alors $-1 < 2p - 1 < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \pi_n = \dfrac{1}{2}$.

---

**4.** Soient $A_1, \cdots, A_n$ des événements mutuellement indépendants. Montrer que la probabilité pour qu'aucun d'eux ne soit réalisée est majorée par $M = \exp\Big(-\sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)\Big)$.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

On étudie $P\Big(\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A_k}\Big)$. Par indépendance des $\overline{A_k}$, on a

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A_k}\Big)=\prod_{k=1}^{n}P(\overline{A_k})=\prod_{k=1}^{n}\big(1-P(A_k)\big)\ .$$

Or, pour $x\in[0,1]$, on a $0\leq 1-x\leq e^{-x}$, d'où

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A_k}\Big)\leq\prod_{k=1}^{n}e^{-P(A_k)}=\exp\Big(-\sum_{k=1}^{n}P(A_k)\Big)=M\ .$$

---

**5.** Soient $m$, $N$, $k$ des entiers naturels au moins égaux à 2, avec $k\leq N$. Une urne contient $mN$ boules dont $N$ sont blanches. On tire $k$ boules dans cette urne, et on s'intéresse à la probabilité de tirer $j$ boules blanches ($0\leq j\leq k$). On pourra poser $p=\dfrac{1}{m}$, le nombre $p\in[0,1]$ est donc la proportion initiale de boules blanches.

**a.** Quelle est cette probabilité si le tirage est avec remise ? On constate qu'elle ne dépend pas de $N$, mais qu'elle ne dépend que de la proportion $p$ de boules blanches dans l'urne.

**b.** Quelle est cette probabilité si le tirage est sans remise ? Elle dépend alors de $N$.

**c.** Si $N$ devient très grand devant le nombre $k$ de boules tirées, on a l'intuition que le fait que le tirage s'effectue avec ou sans remise ne va pas changer grand-chose. Le vérifier mathématiquement.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

**a.** À chaque tirage, la probabilité de "succès", c'est-à-dire de tirer une boule blanche, est $p$, et il y a $k$ tirages indépendants, le nombre de boules blanches tirées suit donc une loi binomiale de paramètres $k$ et $p$. La probabilité de tirer $j$ boules blanches exactement est donc $\dbinom{k}{j}p^j(1-p)^{k-j}$.

**b.** Ici, les tirages possibles sont les parties à $k$ éléments de l'ensemble $[\![1,mN]\!]$ de toutes les boules de l'urne, ces tirages sont au nombre de $\dbinom{mN}{k}$ avec équiprobabilité. Les tirages favorables sont ceux constitués d'une partie à $j$ éléments de l'ensemble des $N$ boules blanches et d'une partie à $k-j$ éléments de l'ensemble des $(m-1)N$ boules non blanches. Ils sont au nombre de $\dbinom{N}{j}\dbinom{(m-1)N}{k-j}$, d'où la probabilité

$$\pi_N=\frac{\dbinom{N}{j}\dbinom{(m-1)N}{k-j}}{\dbinom{mN}{k}}\ .$$

**c.** Il s'agit de vérifier que $\lim\limits_{N\to+\infty} \pi_N = \binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j}$. Pour cela, notons que

$$\binom{N}{j} = \frac{N!}{j!(N-j)!} = \frac{N(N-1)\cdots(N-j+1)}{j!} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{N^j}{j!} \ :$$

en effet, $j$ étant fixé, le coefficient binomial $\binom{N}{j}$ est une fonction polynomiale de la variable $N$, de terme dominant $\frac{N^j}{j!}$. On obtient de même $\binom{(m-1)N}{k-j} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{(m-1)^{k-j}\,N^{k-j}}{(k-j)!}$ et $\binom{mN}{k} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{m^k\,N^k}{k!}$. Par opérations (licites!) sur les équivalents, on déduit

$$\pi_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{N^j}{j!}\ \frac{(m-1)^{k-j}\,N^{k-j}}{(k-j)!}\ \frac{k!}{m^k\,N^k}$$

et, comme on constate que cette expression après simplifications ne dépend en fait pas de $N$, on peut écrire

$$\lim_{N\to+\infty} \pi_N = \frac{k!}{j!(k-j)!}\ \frac{(m-1)^{k-j}}{m^k} = \binom{k}{j} \frac{\left(\frac{1}{p}-1\right)^{k-j}}{\left(\frac{1}{p}\right)^k} = \binom{k}{j}\ p^j\ (1-p)^{k-j}\ ,$$

ce que l'on souhaitait obtenir.

---

**6*.** On s'intéresse à la survie d'une espèce pour laquelle un individu admet trois descendants avec la probabilité $\frac{1}{8}$, un ou deux descendants avec la probabilité $\frac{3}{8}$, et enfin aucun descendant avec la probabilité $\frac{1}{8}$. On suppose qu'à l'instant initial, la population est composée d'un seul individu. Par conséquent, l'espèce s'éteindra au bout de la première génération avec une probabilité de $x_1 = \frac{1}{8}$.

**a.** Quelle est la probabilité $x_2$ pour que l'espèce ait disparu à l'issue de la deuxième génération ?

**b.** Pour tout $n$ entier naturel non nul, on note $x_n$ la probabilité que l'espèce ait disparu à l'issue de la $n$-ème génération. Montrer que la suite $(x_n)$ vérifie la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad x_{n+1} = \frac{1}{8}\left(x_n^3 + 3x_n^2 + 3x_n + 1\right)\ .$$

**c.** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

**a.** Notons $X_k$ le nombre d'individus de la génération $k$. Ainsi, $X_0 = 1$ et $x_1 = P(X_1 = 0) = \frac{1}{8}$. On a alors

$$\begin{aligned} x_2 &= P(X_2 = 0) \\ &= P(X_1 = 0) + P\big(\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 0\}\big) + P\big(\{X_1 = 2\} \cap \{X_2 = 0\}\big) + P\big(\{X_1 = 3\} \cap \{X_2 = 0\}\big) \end{aligned}$$

Mais $P\big(\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 0\}\big) = P(X_2 = 0 | X_1 = 1)\ P(X_1 = 1) = \frac{1}{8} \times \frac{3}{8}$ ;

$$P\big(\{X_1 = 2\} \,\cap\, \{X_2 = 0\}\big) = P(X_2 = 0|X_1 = 2)\, P(X_1 = 2) = \left(\frac{1}{8}\right)^2 \times \frac{3}{8} \;;$$

$$P\big(\{X_1 = 3\} \,\cap\, \{X_2 = 0\}\big) = P(X_2 = 0|X_1 = 3)\, P(X_1 = 3) = \left(\frac{1}{8}\right)^3 \times \frac{1}{8}.$$

Finalement, $x_2 = \dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{8} \times \dfrac{1}{8} + \dfrac{3}{8} \times \left(\dfrac{1}{8}\right)^2 + \dfrac{1}{8} \times \left(\dfrac{1}{8}\right)^3 = \dfrac{729}{4096} \simeq 0,178.$

**b.** On a $P(X_{n+1} = 0) = P(X_1 = 0) + \displaystyle\sum_{k=1}^{3} P\big(\{X_1 = k\} \,\cap\, \{X_{n+1} = 0\}\big)$ et, pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$,

$$P\big(\{X_1 = k\} \cap \{X_{n+1} = 0\}\big) = P(X_{n+1} = 0|X_1 = k)P(X_1 = k) = P(X_n = 0|X_0 = k)P(X_1 = k)\;.$$

Enfin, avec un peu de bon sens, on a $P(X_n = 0|X_0 = k) = \big(P(X_n = 0|X_0 = 1)\big)^k = x_n^k$. On obtient donc

$$x_{n+1} = P(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}x_n + \frac{3}{8}x_n^2 + \frac{1}{8}x_n^3\;,$$

ce qui est la relation demandée.

**c.** Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{8}\big(x^3 + 3x^2 + 3x + 1\big) = \dfrac{(x + 1)^3}{8}$. La fonction $f$ est croissante sur $[0, 1]$ avec $f(0) = \dfrac{1}{8} = 0,125$, $f(1) = 1$, donc l'intervalle $[0, 1]$ est stable par $f$. L'équation $f(x) = x$ admet deux solutions dans $[0, 1]$, qui sont le nombre 1 et le nombre $\alpha = \sqrt{5} - 2 \simeq 0,236$. En fait, l'intervalle $J = [0, \alpha]$ est stable par $f$ puisque son image est $\left[\dfrac{1}{8}, \alpha\right] \subset J$. Comme $x_1 = \dfrac{1}{8} \in J$, on a $x_n \in J$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Sur $J$, on a $f(x) \geq x$ (il est facile d'étudier le signe de $f(x) - x$ après avoir factorisé par $x - 1$), donc la suite $(x_n)$ est croissante. Elle est majorée par $\alpha$, donc elle converge. Le seul point fixe de $f$ adhérent à l'intervalle $J$ est $\alpha$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha = \sqrt{5} - 2$.

---

**7.** Un groupe de $n$ chasseurs tire simultanément et indépendamment sur $n$ canards. Chaque chasseur ne tire qu'une seule fois et atteint toujours sa cible.

**a.** Quelle est la probabilité $p_n$ qu'au moins un canard survive ? Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n$.

**b.** L'un des canards s'appelle Saturnin. Quelle est la probablité $q_n$ qu'il survive ? Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} q_n$.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

**a.** On peut modéliser le résultat du tir par une application de l'ensemble $\mathcal{H}_n$ des $n$ chasseurs vers l'ensemble $\mathcal{C}_n$ des $n$ canards, puisque chaque chasseur atteint un et un seul canard. Donc $|\Omega| = n^n$. Au moins un canard survit si et seulement si cette application n'est pas surjective, i.e. si et seulement si elle n'est pas bijective. Or le nombre d'applications bijectives de $\mathcal{H}_n$ vers $\mathcal{C}_n$ est $n!$. La probabilité qu'au moins un canard survive est donc $p_n = 1 - \dfrac{n!}{n^n}$, et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n = 1$ puisque $n! = o(n^n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**b.** Saturnin s'en tire si et seulement si l'application correspondant au tir est à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{C}_n \setminus \{\text{Saturnin}\}$, de cardinal $n-1$. Comme il y a $(n-1)^n$ applications de l'ensemble $\mathcal{H}_n$ de cardinal $n$ vers l'ensemble $\mathcal{C}_n \setminus \{\text{Saturnin}\}$, de cardinal $n-1$, la probabilité de survie de Saturnin est $q_n = \dfrac{(n-1)^n}{n^n} = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = e^{-1}$.

---

## Variables aléatoires.

**8.** Deux variables aléatoires indépendantes $X$ et $Y$ suivent des lois binomiales de tailles $n$ et $m$ et de même paramètre $p$. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $Z = X + Y$ ?

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

On a clairement $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$, $Y(\Omega) = [\![1, m]\!]$ et $Z(\Omega) = [\![1, n+m]\!]$. Pour $k \in [\![1, n+m]\!]$, on a

$$\{Z = k\} = \bigsqcup_{j=0}^{k} \big(\{X = j\} \cap \{Y = k - j\}\big) .$$

Donc $P(Z = k) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} P\big(\{X = j\} \cap \{Y = k - j\}\big) = \sum_{j=0}^{k} P(X = j)\, P(Y = k - j)$ puisque les variables $X$ et $Y$ sont supposées indépendantes. On obtient donc

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{k-j} p^{k-j} (1-p)^{m-(k-j)} \\ &= p^k\, (1-p)^{n+m-k} \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} . \end{aligned}$$

On conclut grâce à l'identité de Vandermonde: $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} = \binom{n+m}{k}$, que

$$\forall k \in [\![0, n+m]\!] \qquad P(Z = k) = \binom{n+m}{k}\, p^k\, (1-p)^{(n+m)-k} ,$$

donc $Z$ suit la loi binomiale de paramètres $n + m$ et $p$.

***Remarque.*** On peut démontrer l'identité de Vandermonde:

- de façon algébrique, en écrivant de deux façons le coefficient de $X^k$ dans le polynôme $(1+X)^{n+m} = (1+X)^n (1+X)^m$;

- de façon combinatoire, en écrivant le nombre de façons de choisir $k$ éléments dans un ensemble $E$ de cardinal $n+m$ que l'on considérerait comme réunion disjointe d'un ensemble $F$ de cardinal $n$ et d'un ensemble $G$ de cardinal $m$ (pour un $j$ donné dans $[\![0, k]\!]$, on doit choisir $j$ éléments dans $F$ et $k - j$ éléments dans $G$).

---

**9.** Une urne contient $n$ boules blanches et $n$ boules rouges. On tire simultanément $n$ boules dans celle-ci et on note $X$ le nombre de boules rouges obtenues lors de ce tirage. Quelle est la loi de $X$, son espérance, sa variance ?

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Clairement, $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$. On peut d'ailleurs choisir comme univers l'ensemble $\mathcal{P}_n\big([\![1, 2n]\!]\big)$ des parties à $n$ éléments de l'intervalle entier $[\![1, 2n]\!]$ si l'on convient de numéroter les boules de 1 à $2n$, muni de la probabilité uniforme. Le nombre de tirages possibles est $|\Omega| = \binom{2n}{n}$. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, l'événement $\{X = k\}$ est réalisé si l'on tire $k$ boules parmi les $n$ rouges, et $n - k$ boules parmi les $n$ blanches, le nombre de tirages "favorables" est alors $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$. Comme on est en situation d'équiprobabilité, on déduit

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \qquad P(X = k) = \frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{2n}{n}}\ .$$

Il est possible à partir de cela de calculer $\mathrm{E}(X)$, puis $\mathrm{E}(X^2)$, puis la variance mais bôf! Voici une meilleure idée: considérons que les boules rouges sont numérotées de 1 à $n$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit $U_i$ la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule $i$ a été tirée, et 0 sinon. Il est clair que $P(U_i = 1) = \dfrac{1}{2}$ (comme on tire la moitié des boules, la boule $i$ a une chance sur deux de figurer dans le tirage), donc $U_i$ suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\Big(\dfrac{1}{2}\Big)$ et $\mathrm{E}(U_i) = \dfrac{1}{2}$. Enfin, $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} U_i$, donc par linéarité de l'espérance, $\mathrm{E}(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$, résultat assez évident intuitivement.

Ensuite, $X^2 = \Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} U_i\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n} U_i^2 + \sum_{i \neq j} U_i U_j$. Comme $U_i$ suit une loi de Bernoulli, $U_i^2 = U_i$. Si $i \neq j$, la variable $U_i U_j$ suit aussi une loi de Bernoulli (les valeurs possibles sont 0 et 1) et, par un raisonnement simple de dénombrement,

$$\mathrm{E}(U_i U_j) = P(U_i U_j = 1) = \frac{\binom{2n-2}{2n}}{\binom{2n}{n}} = \frac{n-1}{2(2n-1)}\ .$$

Par linéarité de l'espérance,

$$\mathrm{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(U_i^2) + \sum_{i \neq j} \mathrm{E}(U_i U_j) = n\,\frac{1}{2} + n(n-1)\,\frac{n-1}{2(2n-1)} = \frac{n^3}{2(2n-1)}$$

après réduction sur feu moyen. Et enfin, par la formule de Koenig-Huygens,

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = \frac{n^2}{4(2n-1)}\ .$$

---

**10.** Une urne contient $N$ boules numérotées de 1 à $N$. On tire $n$ boules sans remise ($1 \leq n \leq N$). On note $X$ et $Y$ le plus petit et le plus grand numéros obtenus.

**a.** Pour $k \in [\![1, N]\!]$, déterminer $P(X \geq k)$. En déduire la loi de $X$.

**b.** Pour $l \in [\![1, N]\!]$, déterminer $P(Y \leq l)$. En déduire la loi de $l$.

**c.** Quelle est la loi conjointe du couple $U = (X, Y)$ ?

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

On peut considérer que l'univers est l'ensemble des parties à $n$ éléments de l'intervalle $[\![1, N]\!]$, noté $\mathcal{P}_n\big([\![1, N]\!]\big)$, de cardinal $\binom{N}{n}$, muni de l'équiprobabilité.

**a.** L'événement $\{X \geq k\}$ coïncide donc avec l'ensemble $\mathcal{P}_n\big([\![k, N]\!]\big)$, de cardinal $\binom{N-k+1}{n}$, puisque cela signifie que l'on tire $n$ boules dont les numéros sont compris entre $k$ et $N$. Notons que cet ensemble est vide si $n > N-k+1$, mais ceci est cohérent avec la convention $\binom{n}{p} = 0$ lorsque $p > n$. On a donc $P(X \geq k) = \dfrac{\binom{N-k+1}{n}}{\binom{N}{n}}$. On en déduit

$$P(X = k) = P(X \geq k) - P(X \geq k+1) = \frac{\binom{N-k+1}{n} - \binom{N-k}{n}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{N-k}{n-1}}{\binom{N}{n}}$$

en utilisant la formule de Pascal.

*Remarque.* On retrouve ce résultat plus simplement en voyant que l'événement $\{X = k\}$ correspond aux parties de cardinal $n$ de l'intervalle $[\![1, N]\!]$ qui contiennent l'élément $k$ et qui contiennent $n-1$ éléments distincts parmi les $N-k$ éléments de l'intervalle $[\![k+1, N]\!]$, il y a donc $\binom{N-k}{n-1}$ telles parties.

**b.** De façon analogue, $\{Y \leq l\} = \mathcal{P}_n\big([\![1, l]\!]\big)$, donc $P(Y \leq l) = \dfrac{\binom{l}{n}}{\binom{N}{n}}$, puis

$$P(Y = l) = P(Y \leq l) - P(Y \leq l-1) = \frac{\binom{l}{n} - \binom{l-1}{n}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{l-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}$$

**c.** L'événement $\big\{U = (k, l)\big\} = \{X = k\} \cap \{Y = l\}$ correspond aux parties de cardinal $n$ de l'intervalle $[\![1, N]\!]$ contenant l'élément $k$, l'élément $l$, et $n-2$ éléments parmi les $l-k-1$ de l'intervalle $[\![k+1, l-1]\!]$. Il y a $\binom{l-k-1}{n-2}$ telles parties, donc

$$\forall (k,l) \in [\![1,N]\!]^2 \qquad P\big((X,Y)=(k,l)\big) = \frac{\dbinom{l-k-1}{n-2}}{\dbinom{N}{n}} \ .$$

---

**11.** On considère une suite de tirages avec remise dans une urne contenant $N$ boules numérotées de 1 à $N$. Pour tout $n \geq 1$, on note $X_n$ le nombre de numéros non encore sortis à l'issue du $n$-ème tirage.

**a.** Que dire de la variable aléatoire $X_1$ ?

**b.** Pour $n \geq 1$, quel est l'ensemble $X_n(\Omega)$ ?

**c.** En utilisant la formule des probabilités totales, montrer la relation, pour $n \geq 2$ et $k \in [\![0, N-1]\!]$,

$$P(X_n = k) = \frac{N-k}{N}\, P(X_{n-1} = k) + \frac{k+1}{N}\, P(X_{n-1} = k+1) \ .$$

**d.** En déduire que la suite $\big(\mathrm{E}(X_n)\big)_{n \geq 1}$ est géométrique, et donner l'expression de $\mathrm{E}(X_n)$.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

**a.** La variable aléatoire $X_1$ est constante, de valeur $N-1$.

**b.** On a $X_n(\Omega) = [\![N-n, N-1]\!]$ si $1 \leq n \leq N$, et $X_n(\Omega) = [\![0, N-1]\!]$ si $n \geq N$.

**c.** Pour $n \geq 2$ et $k \in [\![0, N-1]\!]$, on a

$$\{X_n = k\} = \big(\{X_n = k\} \ \cap \ \{X_{n-1} = k\}\big) \sqcup \big(\{X_n = k\} \ \cap \ \{X_{n-1} = k+1\}\big)$$

(réunion disjointe). On a donc

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= P(X_n = k \text{ et } X_{n-1} = k) + P(X_n = k \text{ et } X_{n-1} = k+1) \\ &= P(X_{n-1} = k)\, P(X_n = k | X_{n-1} = k) + P(X_{n-1} = k+1)\, P(X_n = k | X_{n-1} = k+1) \ . \end{aligned}$$

Or, $P(X_n = k | X_{n-1} = k) = \dfrac{N-k}{N}$ puisque la $n$-ème boule doit alors être tirée parmi les $N-k$ boules déjà tirées parmi les $N$ boules de l'urne. Et $P(X_n = k | X_{n-1} = k+1) = \dfrac{k+1}{N}$ puisque la $n$-ème boule doit alors être tirée parmi les $k+1$ boules non encore obtenues parmi les $N$ boules de l'urne. On obtient bien la relation

$$P(X_n = k) = \frac{N-k}{N}\, P(X_{n-1} = k) + \frac{k+1}{N}\, P(X_{n-1} = k+1) \ .$$

**d.** Pour $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X_n) &= \sum_{k=0}^{N-1} k\, P(X_n = k) \ = \ \sum_{k=1}^{N-1} k\, P(X_n = k) \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} k \frac{N-k}{N}\, P(X_{n-1} = k) + \sum_{k=0}^{N-2} k\, \frac{k+1}{N}\, P(X_{n-1} = k+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{N-1} k\,P(X_{n-1}=k) - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} k^2\,P(X_{n-1}=k) + \sum_{k=1}^{N-1}\frac{(k-1)k}{N}\,P(X_{n-1}=k)\\
&= \sum_{k=1}^{N-1} k\,P(X_{n-1}=k) - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} k^2\,P(X_{n-1}=k) + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} k^2\,P(X_{n-1}=k) - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} k\,P(X_{n-1}=k)\\
&= \left(1-\frac{1}{N}\right)\sum_{k=1}^{N-1} k\,P(X_{n-1}=k)\\
&= \left(1-\frac{1}{N}\right)\mathrm{E}(X_{n-1})\,.
\end{aligned}$$

La suite $\big(\mathrm{E}(X_n)\big)_{n\geq 1}$ est donc géométrique, de raison $1-\dfrac{1}{N}$. Comme $\mathrm{E}(X_1)=N-1$, on déduit, pour $n\geq 1$,

$$\mathrm{E}(X_n)=(N-1)\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}=\frac{(N-1)^n}{N^{n-1}}\,.$$

---

**12.** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![1,n+1]\!]$. On suppose que

$$\forall (i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2 \qquad P\big(\{X=i\}\,\cap\,\{Y=j\}\big)=\frac{1}{2^{2n}}\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}\,.$$

**a.** Déterminer la loi de $X$. Reconnaître la loi de $X-1$, en déduire $\mathrm{E}(X)$.

**b.** Les variables $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

**c.** Soit $M=(m_{i,j})\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, avec $m_{i,j}=P\big(\{X=i\}\,\cap\,\{Y=j\}\big)$. Calculer $M^2$, en déduire le spectre de $M$.

*Indication.* On pourra utiliser (et éventuellement prouver) la relation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

**a.** Si l'on fixe $i\in[\![1,n+1]\!]$, alors

$$P(X=i)=\sum_{j=1}^{n+1}a_{i,j}=\frac{1}{4^n}\binom{n}{i-1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}=\frac{1}{2^n}\binom{n}{i-1}\,.$$

Soit $Z=X-1$, alors $Z(\Omega)=[\![0,n]\!]$ et

$$\forall k\in[\![0,n]\!] \qquad P(Z=k)=P(X=k+1)=\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}\,.$$

On reconnaît une loi binomiale de paramètres $n$ et $\dfrac{1}{2}$. Donc $\mathrm{E}(X-1)=\dfrac{n}{2}$ d'après le cours, puis $\mathrm{E}(X)=\dfrac{n}{2}+1$.

**b.** De façon symétrique, pour $j\in[\![1,n+1]\!]$, $P(Y=j)=\dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{j-1}$. Les variables $X$ et $Y$ ont la même loi. On voit immédiatement alors que

$$\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2 \qquad m_{i,j} = P\big(\{X = i\} \,\cap\, \{Y = j\}\big) = P(X = i)\, P(Y = j)\ ,$$

donc les variables $X$ et $Y$ sont indépendantes.

**c.** Posons $M^2 = A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n+1}$. Alors $a_{i,k} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} m_{i,j} m_{j,k}$, soit

$$a_{i,k} = \frac{1}{16^n} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}^2 \binom{n}{k-1} = \frac{1}{16^n} \binom{n}{i-1} \binom{n}{k-1} \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l}^2 = \frac{\binom{2n}{n}}{16^n} \binom{n}{i-1} \binom{n}{k-1}\ .$$

En changeant de notations et en posant $K = \dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}$, on voit que $a_{i,j} = K\, m_{i,j}$, autrement dit $M^2 = K\, M$. Le polynôme $P = X^2 - KX = X(X-K)$ est donc annulateur de $M$, on en déduit que $M$ est diagonalisable (*mais on pouvait aussi noter que $M$ est symétrique réelle*) et $\mathrm{Sp}(M) \subset \{0, K\}$. Comme une matrice diagonalisable avec une seule valeur propre est scalaire (i.e. de la forme $\lambda I_{n+1}$), ce qui n'est pas le cas ici, on déduit que les nombres 0 et $K = \dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}$ sont tous deux valeurs propres de $M$ et en constituent le spectre.

*Quelques remarques.* La relation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ s'obtient facilement en observant le coefficient de $X^n$ dans le polynôme $(X+1)^{2n}$, que l'on peut écrire aussi $(X+1)^n (X+1)^n$.

L'écriture de $m_{i,j}$ sous la forme $m_{i,j} = c_i c_j$ avec $c_i = \dfrac{\binom{n}{i-1}}{2^n}$ montre que la matrice $M$ est de rang 1 ; en effet, ses lignes sont toutes proportionnelles. La valeur propre 0 est donc de multiplicité $n-1$, et la valeur propre $K = \dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}$ (dont on peut remarquer que c'est la trace de $M$) est simple.