Convergence dominée et intégration terme à terme.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{n^2}\, e^{-\frac{x}{n}}$.

a. Montrer que chaque fonction f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

b. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

c. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction intégrable f.

d. Quelle remarque peut-on faire ?

- -

a. La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et, par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 f_n(x) = 0$, donc $f_n(x)$ est négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Ainsi, f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$ pour tout $n \geq 1$.

b. Calcul facile: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

c. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ (évident), la suite de fonctions (f_n) converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle. Une étude de variations montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x)| = f_n(n) = \frac{1}{en} \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad 0\ ,$$

donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle.

d. On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$, mais $\displaystyle\int_0^{+\infty}\Big(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\Big)\,\mathrm{d}x = 0$. Ainsi, sur un intervalle quelconque, la convergence uniforme d'une suite de fonctions ne permet pas d'intervertir limite et intégrale, les théorèmes vus dans le cas d'un segment ne sont plus valables. *C'est pourquoi, sur un intervalle quelconque, on invoquera le* **théorème de convergence dominée**, *dont les hypothèses sont différentes.*

---

2. Soit l'intégrale $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ (que l'on ne cherchera pas à calculer).

Donner un équivalent simple de $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^n}\,\mathrm{d}x$ lorsque n tend vers $+\infty$, faisant intervenir l'intégrale J.

- -

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ car elle est négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ (croissances comparées) en $+\infty$, cela assure l'existence de l'intégrale J.

Pour les mêmes raisons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto e^{-x^n}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ d'où l'existence de I_n. Par le changement de variable $t = x^n$, on obtient

$$I_n = \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t\ , \qquad \text{avec} \quad f_n(t) = t^{\frac{1}{n}-1}\, e^{-t}\ .$$

Or, pour tout $t \in [1,+\infty[$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = f(t) = \frac{e^{-t}}{t}$ (convergence simple), et (l'exposant de t étant négatif) $0 \leq f_n(t) \leq e^{-t}$, la fonction $\varphi : t \mapsto e^{-t}$ étant intégrable sur $[1,+\infty[$ (condition de domination). On applique donc le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{[1,+\infty[} f_n = \int_{[1,+\infty[}\Big(\lim_{n\to+\infty} f_n\Big) = \int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = J\ ,$$

puis $I_n \sim \dfrac{J}{n}$.

---

3. Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t$.

---

4. Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue, avec $f(1)\neq 0$. Trouver un équivalent de $I_n=\displaystyle\int_0^1 t^n\,f(t)\,\mathrm{d}t$.

On pourra utiliser le changement de variable $u=t^{n+1}$.

- -

Le changement de variable proposé donne $(n+1)\,I_n=\displaystyle\int_0^1 f\Big(u^{\frac{1}{n+1}}\Big)\,\mathrm{d}u$.

Posons $g_n(u)=f\Big(u^{\frac{1}{n+1}}\Big)$ pour $n\in\mathbb{N}$ et $u\in]0,1]$, alors la suite de fonctions (g_n) converge simplement sur $]0,1]$ vers la fonction constante de valeur $f(1)$ par continuité de f au point 1. D'autre part, f étant continue sur le segment $[0,1]$, elle est bornée sur ce segment: il existe $M\in\mathbb{R}_+$ tel que $\forall x\in[0,1]\quad \big|f(x)\big|\leq M$. On a alors la domination

$$\forall u\in]0,1]\quad \forall n\in\mathbb{N}\qquad \big|g_n(u)\big|\leq M\ ,$$

la fonction constante $u\mapsto M$ étant intégrable sur $]0,1]$.

Le théorème de convergence dominée permet alors d'affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 g_n(u)\,\mathrm{d}u=\int_0^1\Big(\lim_{n\to+\infty}g_n(u)\Big)\,\mathrm{d}u=\int_0^1 f(1)\,\mathrm{d}u=f(1)\ .$$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n+1)I_n=f(1)$ et, comme $f(1)$ est non nul, $I_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{f(1)}{n}$.

---

5. Pour n entier naturel, on pose $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Montrer que la suite (I_n) tend vers zéro en décroissant.

b. Montrer la convergence de la série de terme général $(-1)^n I_n$ et calculer sa somme.

- -

a. On a $I_{n+1}-I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(x)\,\big(\cos(x)-1\big)\,\mathrm{d}x\leq 0$, puisque la fonction que l'on intègre est négative. Donc la suite (I_n) est décroissante.

Posons $f_n(x)=(\cos x)^n$. Les fonctions f_n sont continues sur $S=\Big[0,\dfrac{\pi}{2}\Big]$, la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur S vers la fonction f continue par morceaux, telle que $f(0)=1$ et $f(x)=0$ pour $x\in\Big]0,\dfrac{\pi}{2}\Big]$. Enfin, on a la domination $[f_n(x)|\leq 1$, la fonction constante 1 étant intégrable sur S. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée (interversion limite-intégrale) qui donne

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} \int_S f_n = \int_S \lim_{n\to+\infty} f_n = \int_S f = 0\ .$$

b. Du coup, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n I_n$ converge, par application du critère spécial des séries alternées.

Pour obtenir sa somme, travaillons sur une somme partielle S_n:

Commentaires: il n'y a pas de problème pour intervertir une intégrale et une somme FINIE! On reconnaîtra ensuite, sous l'intégrale, une somme géométrique de raison $-\cos x$*.*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k (\cos x)^k\ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-(-1)^{n+1}(\cos x)^{n+1}}{1+\cos x}\ \mathrm{d}x = S + (-1)^n\ R_n\ ,$$

avec $S = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$ et $R_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^{n+1}}{1+\cos x}\ \mathrm{d}x$.

À l'aide du théorème de convergence dominée, comme en **a.**, on montre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = S$, il ne reste plus qu'à calculer l'intégrale S. Or,

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\dfrac{x}{2}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \big[\tan(t)\big]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1\ .$$

Finalement, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n I_n = 1$.

---

6. Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles bornées. Soient c et d deux réels tels que $c < d$. On suppose que

$$\forall x\in[c,d]\qquad \lim_{n\to+\infty}\Big(a_n\ \cos(nx) + b_n\ \sin(nx)\Big) = 0\ .$$

a. Montrer que, pour tout entier n, il existe un réel φ_n tel que

$$a_n\ \cos(nx) + b_n\ \sin(nx) = \sqrt{a_n^2+b_n^2}\ \cos(nx+\varphi_n)\ .$$

b. Calculer $I_n = \displaystyle\int_c^d \big(a_n\ \cos(nx)+b_n\ \sin(nx)\big)^2\ \mathrm{d}x$.

c. Montrer que, à partir d'un certain rang, on a $I_n \geq \dfrac{(a_n^2+b_n^2)(d-c)}{4}$.

d. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) tendent vers 0.

- -

a. Si a_n et b_n sont nuls, alors n'importe quel réel φ_n fera l'affaire.

Sinon, les réels $\alpha_n = \dfrac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}$ et $\beta_n = -\dfrac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}$ sont tels que $\alpha_n^2+\beta_n^2 = 1$, il existe alors un réel φ_n (déterminé modulo 2π) tel que $\cos(\varphi_n) = \alpha_n$ et $\sin(\varphi_n) = \beta_n$. Ainsi,

$$\begin{aligned} a_n\ \cos(nx)+b_n\ \sin(nx) &= \sqrt{a_n^2+b_n^2}\ \big(\alpha_n\ \cos(nx)-\beta_n\ \sin(nx)\big) \\ &= \sqrt{a_n^2+b_n^2}\ \Big(\cos(\varphi_n)\ \cos(nx)-\sin(\varphi_n)\ \sin(nx)\Big) \\ &= \sqrt{a_n^2+b_n^2}\ \cos(nx+\varphi_n)\ . \end{aligned}$$

b. D'abord, $I_0=a_0^2(d-c)$ et, pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} I_n &= (a_n^2+b_n^2)\ \int_c^d \cos^2(nx+\varphi_n)\,\mathrm{d}x \\ &= (a_n^2+b_n^2)\ \int_{nc+\varphi_n}^{nd+\varphi_n} \cos^2(t)\ \frac{\mathrm{d}t}{n} \\ &= \frac{a_n^2+b_n^2}{n}\ \int_{nc+\varphi_n}^{nd+\varphi_n} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{a_n^2+b_n^2}{n}\ \left[\frac{t}{2}+\frac{\sin(2t)}{4}\right]_{nc+\varphi_n}^{nd+\varphi_n} \\ &= \frac{(a_n^2+b_n^2)(d-c)}{2}+\frac{a_n^2+b_n^2}{4n}\ \Big[\sin(2nd+2\varphi_n)-\sin(2nc+2\varphi_n)\Big]\ . \end{aligned}$$

c. On peut donc écrire $I_n=(a_n^2+b_n^2)\left(\dfrac{d-c}{2}+\dfrac{r_n}{4n}\right)$, avec

$$r_n=\sin(2nd+2\varphi_n)-\sin(2nc+2\varphi_n)\ .$$

On constate que $|r_n|\le 2$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{r_n}{4n}=0$, donc $\dfrac{d-c}{2}+\dfrac{r_n}{4n}\ge\dfrac{d-c}{4}$ pour n assez grand, puis $I_n\ge\dfrac{(a_n^2+b_n^2)(d-c)}{4}$ pour n assez grand.

d. Posons $f_n(x)=\big(a_n\ \cos(nx)+b_n\ \sin(nx)\big)^2$ pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in[c,d]$. Alors les fonctions f_n sont continues sur $[c,d]$, la, suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[c,d]$ vers la fonction nulle, et si on choisit un réel positif M tel que $|a_n|\le M$ et $|b_n|\le M$ pour tout n, on a la domination

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \forall x\in[c,d]\qquad |f_n(x)|\le(2M)^2\ ,$$

la fonction constante $x\mapsto(2M)^2$ étant intégrable sur le segment $[c,d]$. Le théorème de convergence dominée s'applique donc, et donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}I_n=0$. De l'encadrement $0\le a_n^2+b_n^2\le\dfrac{4}{d-c}\,I_n$ valable pour n assez grand, on déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(a_n^2+b_n^2)=0$. Enfin, $0\le a_n^2\le a_n^2+b_n^2$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}a_n^2=0$, puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}a_n=0$. De même, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}b_n=0$.

---

7. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Calculer $\displaystyle J(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\ \cos(xt)\,\mathrm{d}t$ pour x réel.

- -

Fixons un réel x. La fonction cosinus étant développable en série entière sur $\mathbb{R}$, on a $J(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)$, avec $f_n(t) = (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}\, t^{2n}\, e^{-t^2}$. Posons $I_n = \int_0^{+\infty} t^{2n}\, e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$, alors $I_0 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $I_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2} I_n$ (i.p.p.), d'où $I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}\, n!} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ (après un calcul classique). Donc $\int_{\mathbb{R}_+} |f_n| = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \dfrac{x^{2n}}{2^{2n}\, n!}$, terme général d'une série convergente (facile), on peut donc intégrer terme à terme, résultat :

$$J(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-\frac{x^2}{4}} .$$

---

8. On donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$. Calculer $I = \int_0^{+\infty} \ln(1+e^{-t})\, \mathrm{d}t$ et $J = \int_0^{+\infty} \ln(1-e^{-t})\, \mathrm{d}t$.

- -

• La fonction $f : t \mapsto \ln(1+e^{-t})$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $0 \le f(t) \le e^{-t}$, ce qui assure son intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$ et la convergence de l'intégrale impropre I. Pour $t > 0$, on a $\ln(1+e^{-t}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}\, e^{-nt}}{n}$, les fonctions $f_n : t \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}\, e^{-nt}}{n}$ sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+$, et $\int_{\mathbb{R}_+} |f_n| = \dfrac{1}{n^2}$ (terme général d'une série convergente) : on peut donc intégrer terme à terme, cela donne

$$I = \int_{\mathbb{R}_+} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

par un calcul classique, laissé au lecteur.

• La fonction $g : t \mapsto \ln(1-e^{-t})$ est continue sur $]0,+\infty[$, on a $g(t) \sim \ln t$ en 0 ce qui assure l'intégrabilité sur $]0,1]$, et $g(t) \sim -e^{-t}$ en $+\infty$ ce qui assure son intégrabilité sur $[1,+\infty[$ et la convergence de l'intégrale J. Pour $t > 0$, on a $\ln(1-e^{-t}) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{e^{-nt}}{n}$, les fonctions $g_n : t \mapsto -\dfrac{e^{-nt}}{n}$ sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+$, et $\int_{\mathbb{R}_+} |g_n| = \dfrac{1}{n^2}$ (terme général d'une série convergente) : on peut donc intégrer terme à terme, cela donne

$$J = \int_{\mathbb{R}_+} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} g_n = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6} .$$

9.a. Sachant que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, \mathrm{d}u = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, calculer $I_n = \int_0^{+\infty} \sqrt{t}\, e^{-nt}\, \mathrm{d}t$ pour n entier naturel non nul.

b. Prouver l'égalité $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sqrt{t}}{e^t - 1}\, \mathrm{d}t = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n\,\sqrt{n}}$.

- -

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : t \mapsto \sqrt{t}\, e^{-nt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ puisque, par croissances comparées, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 f_n(t) = 0$. En posant $nt = u^2$, on a

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{u}{\sqrt{n}}\, e^{-u^2}\, \frac{2u\,\mathrm{d}u}{n} = \frac{2}{n\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} u^2\, e^{-u^2}\, \mathrm{d}u\ .$$

Ensuite, une intégration par parties avec $f' = u\, e^{-u^2} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\Big(-\dfrac{1}{2}\, e^{-u^2}\Big)$ donne

$$I_n = \frac{2}{n\sqrt{n}}\, \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2n\sqrt{n}}\ .$$

b. Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, posons $s(t) = \dfrac{\sqrt{t}}{e^t - 1} = \dfrac{\sqrt{t}\, e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \sqrt{t} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)$. Les fonctions f_n sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$, la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et a pour somme la fonction continue s, il ne reste plus qu'à s'assurer de la convergence de la série de terme général $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} |f_n|$ pour pouvoir appliquer le théorème d'intégration terme à terme. Or, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} |f_n| = \int_{\mathbb{R}_+^*} f_n = I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, \frac{1}{n^{3/2}}$, terme général d'une série de Riemann convergente. Allons-y donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}\, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}_+^*} s = \int_{\mathbb{R}_+^*} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}_+^*} f_n = \sum_{n=1}^{+\infty} I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}\ .$$

10*. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ continue. Comparer les natures de l'intégrale généralisée $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{1-t}\, \mathrm{d}t$ et de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \int_0^1 t^n\, f(t)\, \mathrm{d}t$.

- -

Posons $g_n(t) = t^n f(t)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$, et $g(t) = \dfrac{f(t)}{1-t}$ pour $t \in [0,1[$. Les fonctions g_n sont continues et intégrables sur $[0,1[$ (puisque p.p.c. au point 1), la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geq 0} g_n$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction continue g. Donc, si la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \int_0^1 t^n\, f(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{n \geq 0} \int_{[0,1[} |g_n|$ converge, le théorème d'intégration terme à terme s'applique et donne l'intégrablité sur $[0,1[$ de la fonction g (i.e. la convergence de l'intégrale J), et l'égalité

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{1-t}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 t^n\, f(t)\, \mathrm{d}t\ .$$

Réciproquement, supposons g intégrable sur $[0,1[$. Posons $s_n(t)=\sum_{k=0}^{n} g_k(t)=f(t)\,\dfrac{1-t^{n+1}}{1-t}$ pour $n\in\mathbb{N}$ et $t\in[0,1[$. Alors les fonctions s_n sont continues sur $[0,1[$, la suite (s_n) converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction continue g et on a, sur $[0,1[$, la domination $0\le s_n(t)\le g(t)$, avec g intégrable sur $[0,1[$. Le théorème de convergence dominée s'applique alors et donne $\displaystyle\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 s_n(t)\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 g_k(t)\mathrm{d}t\right)$. La série de terme général $\displaystyle\int_0^1 g_k(t)\,\mathrm{d}t$ est donc convergente.

11.a. Pour p et q entiers naturels, convergence et calcul de $I_{p,q}=\displaystyle\int_0^1 x^p\,(\ln x)^q\,\mathrm{d}x$.

b. Prouver les égalités $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$ et $\displaystyle\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

- -

a. La fonction $f_{p,q}:x\mapsto x^p\,(\ln x)^q$ est continue sur $]0,1[$.

Elle est prolongeable par continuité au point 1, avec la valeur 0 si $q>0$, ou 1 si $q=0$.

Si $p>0$, elle est aussi prolongeable par continuité en 0 avec la valeur 0, d'où son intégrabilité sur $]0,1[$. Sinon, de $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x}(\ln x)^q=0$, on déduit l'intégrabilité de $f_{0,q}$ en 0 puisque $f_{0,q}(x)=(\ln x)^q=o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\Big)$ lorsque $x\to0$.

Pour le calcul, notons d'abord que $I_{p,0}=\dfrac{1}{p+1}$ pour tout $p\in\mathbb{N}$. Puis, pour $q\ge1$, intégrons par parties:

$$I_{p,q}=-\int_0^1\frac{x^{p+1}}{p+1}\,\frac{q}{x}\,(\ln x)^{q-1}\,\mathrm{d}x=-\frac{q}{p+1}\,I_{p,q-1}\;,$$

et une récurence facile donne $I_{p,q}=\dfrac{(-1)^q\,q!}{(p+1)^q}\,I_{p,0}=\dfrac{(-1)^q\,q!}{(p+1)^{q+1}}$.

b. • Posons $g(x)=\dfrac{1}{x^x}$ pour $x\in\,]0,1[$, alors $g(x)=e^{-x\,\ln(x)}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}g_n(x)$ en posant $g_n(x)=\dfrac{(-1)^n\,x^n\,(\ln x)^n}{n!}$, soit $g_n=\dfrac{(-1)^n}{n!}\,f_{n,n}$. Les fonctions g_n sont donc intégrables sur $]0,1[$ d'après **a.**, on a $\displaystyle\int_0^1|g_n|=\int_0^1 g_n=\frac{|I_{n,n}|}{n!}=\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ qui est clairement sommable, on peut donc intégrer terme à terme, et cela donne

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^x}=\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty}g_n(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}\;.$$

• Un calcul semblable (et, surtout, des justifications semblables) donne

$$\int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n g_n(x)\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n} \ .$$

---

12. Pour $a > 0$, montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+a}$.

- -

Notons d'abord que:

- l'intégrale du premier membre est bien convergente puisque $\displaystyle\frac{t^{a-1}}{1+t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-a}}$ avec $1-a < 1$;

- la série du second membre est bien convergente, en vertu du théorème spécial des séries alternées, puisque la suite $\displaystyle\left(\frac{1}{n+a}\right)$ est décroissante et tend vers zéro.

Toutefois, cette série n'est pas absolument convergente, et ceci nous empêche d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme pour conclure. En effet, pour $t \in]0,1[$, on peut écrire $\displaystyle\frac{t^{a-1}}{1+t} = t^{a-1} \sum_{n=0}^{+\infty}(-t)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \, t^{a+n-1}$ et, si l'on pose $f_n(t) = (-1)^n \, t^{a+n-1}$, alors la série de terme général $\displaystyle\int_0^1 \left|f_n(t)\right| \mathrm{d}t = \frac{1}{a+n}$ est divergente!

Travaillons alors sur une somme partielle de la série: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+a} = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k t^{k+a-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{a+k-1}\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{a-1}\left(\sum_{k=0}^{n}(-t)^k\right)\mathrm{d}t$$

(il n'y aucun problème pour intervertir somme et intégrale, tant qu'il s'agit d'une somme finie!). On reconnaît maintenant sous l'intégrale une somme partielle d'une série géométrique, et cela on sait l'expliciter. Donc

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+a} = \int_0^1 t^{a-1}\,\frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{a+n}}{1+t}\,\mathrm{d}t \ .$$

Pour parvenir à nos fins, il ne reste plus qu'à prouver que l'intégrale $\displaystyle R_n = \int_0^1 \frac{t^{a+n}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. C'est facile puisque

$$0 \le R_n = \int_0^1 \frac{t^{a+n}}{1+t}\,\mathrm{d}t \le \int_0^1 t^{a+n}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a+n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$

Remarque. Une variante consistait à appliquer le théorème de convergence dominée à la suite (s_n) des sommes partielles, avec $\displaystyle s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$.

Intégrales dépendant d'un paramètre.

13. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x\,(1+t)}$.

a. Montrer que f est définie et monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Trouver une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$. En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$, et aussi lorsque $x \to 0^+$.

- -

a. Soit l'application $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times [1,+\infty[\ \to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto \dfrac{1}{t^x(1+t)} \end{cases}$. Alors, pour $x > 0$ fixé, on a $\varphi(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{x+1}}$; comme $x+1>1$, on a prouvé la convergence de l'intégrale impropre, c'est-à-dire l'existence de $f(x)$.

Montrons la décroissance de f sans calculer sa dérivée : si x et y vérifient $0<x<y$, alors, pour tout $t \in]1,+\infty[$, on a $\varphi(x,t) > \varphi(y,t)$; en intégrant cette inégalité, on obtient $f(x) > f(y)$: l'inégalité est stricte car on intègre des fonctions continues et non identiques. La fonction f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. • On a, pour tout $x>0$,

$$f(x) + f(x+1) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{x+1}} = \left[-\frac{1}{x\,t^x}\right]_{t=1}^{t\to+\infty} = \frac{1}{x}\ .$$

• Comme f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a, pour tout $x>1$,

$$f(x)+f(x+1) \leq 2f(x) \leq f(x-1)+f(x)\ ,\quad \text{soit}\qquad \frac{1}{2x} \leq f(x) \leq \frac{1}{2(x-1)}\ ,$$

d'où l'équivalence $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$.

• D'autre part, $f(x) = \dfrac{1}{x} - f(x+1)$; lorsque x tend vers zéro, $f(x+1)$ est borné ($0 < f(x+1) < f(1)$ pour $x \in]0,1[$) et est donc négligeable devant $\dfrac{1}{x}$ qui tend vers l'infini. Donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

Annexe. La fonction φ admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{\ln t}{t^x(1+t)}$. En considérant $a>0$, la majoration $\left|\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leq \dfrac{\ln t}{t^{a+1}}$ est valable pour tout $(x,t) \in [a,+\infty[\times[1,+\infty[$ et, la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^{a+1}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ car, pour t assez grand, on a $0 < \dfrac{\ln t}{t^{a+1}} < \dfrac{1}{t^{1+\frac{a}{2}}}$ (croissance comparée des fonctions puissances et logarithmes) ; on a ainsi prouvé que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$, avec

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f'(x) = -\int_1^{+\infty} \frac{\ln t \,\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}\ .$$

Donc $f'(x) < 0$ et on retrouve bien ainsi la stricte décroissante de f sur $\mathbb{R}_+^*$ (question **a.**).

---

14. Pour $x \geq 0$, calculer $g(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{Arctan}(x \cdot \tan t)}{\tan t}\,\mathrm{d}t$.

- -

Posons $f(x,t) = \dfrac{\mathrm{Arctan}(x\ \tan t)}{\tan t}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Ainsi, f est continue sur cet ensemble (ce qui entraîne la continuité des applications partielles) et, si $A > 0$, la majoration

$$|f(x,t)| \leq \frac{\mathrm{Arctan}(A\ \tan t)}{\tan t} = \varphi_A(t)\ ,$$

valable pour $(x,t) \in [0,A] \times \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, prouve la définition et la continuité de g sur $[0,A]$ pour tout $A > 0$, donc sur $\mathbb{R}_+$: on a, en effet, $\displaystyle\lim_{t\to 0} \varphi_A(t) = A$ et $\displaystyle\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \varphi_A(t) = 0$; la fonction φ_A, prolongeable en une fonction continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, est intégrable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{1}{1+x^2\ \tan^2 t}$ et la majoration immédiate $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq 1$ (la fonction constante $t \mapsto 1$ étant intégrable sur l'intervalle borné $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$) montre que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $g'(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+x^2\ \tan^2 t}$. Le calcul de cette intégrale (par exemple, en posant $\tau = \tan t$, puis en décomposant en éléments simples la fraction $\dfrac{1}{(1+T)(1+x^2T)}$, avec $T = \tau^2$), donne $g'(x) = \dfrac{\pi}{2(x+1)}$. Comme $g(0) = 0$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad g(x) = \frac{\pi}{2}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = \frac{\pi}{2}\ \ln(1+x)\ .$$

---

15. Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et expliciter $g'(x)$.

b. Calculer directement $g(1)$; en déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$.

- -

a. Posons $f(x,t) = \dfrac{\mathrm{Arctan}(xt)}{1+t^2}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. La majoration $|f(x,t)| \leq \dfrac{\pi}{2(1+t^2)}$ permet de prouver que g est définie et continue sur $\mathbb{R}$. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$ et, si on fixe $a > 0$, la majoration $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \dfrac{t}{(1+a^2t^2)(1+t^2)}$, valable pour

$(x,t) \in [a,+\infty[\times \mathbb{R}_+$, permet de montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$, et de même sur $\mathbb{R}_-^*$ (g est une fonction impaire). La formule de Leibniz (dérivation sous le signe $\displaystyle\int$) donne, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(1+x^2u)(1+u)} \ .$$

On décompose alors en éléments simples :

$$\frac{1}{(1+x^2u)(1+u)} = \frac{1}{x^2-1}\Big(\frac{x^2}{1+x^2u} - \frac{1}{1+u}\Big) \qquad \text{si} \quad |x| \neq 1 \ .$$

Donc, si $|x| \neq 1$,

$$g'(x) = \frac{1}{2(x^2-1)}\left[\ln\Big(\frac{1+x^2u}{1+u}\Big)\right]_{u=0}^{u\to+\infty} = \frac{\ln(x^2)}{2(x^2-1)} = \frac{\ln|x|}{x^2-1} \ .$$

Enfin, $g'(1) = g'(-1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{(1+u)^2} = \Big[-\frac{1}{2(1+u)}\Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$

b. Directement, $g(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}\, t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\,(\mathrm{Arctan}\, t)^2\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{8}$ par une intégration par parties. Par ailleurs, pour tout $a > 0$, on a **(*)** : $\displaystyle\int_a^1 g'(x)\,\mathrm{d}x = g(1) - g(a)$ car g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc sur le segment $[a,1]$. Mais la fonction g' est intégrable sur $]0,1]$ car elle est continue sur cet intervalle et que $g'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} |\ln x|$ et on sait que la fonction $x \mapsto |\ln x|$ est intégrable sur $]0,1]$. Comme enfin g est continue sur $\mathbb{R}$, en faisant tendre a vers 0 dans **(*)**, on obtient $\displaystyle\int_0^1 g'(x)\,\mathrm{d}x = g(1) - g(0)$, soit

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{8} \ .$$

16.a. Soit la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et écrire une équation différentielle du premier ordre vérifiée par g sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $G = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

- -

a. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}_+$ et, si l'on pose $f(x,t) = \dfrac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ pour $x \geq 0$ et $t \geq 0$, la fonction f est continue sur $(\mathbb{R}_+)^2$ et la majoration $0 \leq f(x,t) \leq \dfrac{1}{1+t^2}$ prouve que g est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout $(x,t) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{-t^2\ e^{-xt^2}}{1+t^2}$. Si $S = [a,b]$ est un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ $(0 < a < b)$, on a

$$\forall (x,t) \in S \times \mathbb{R}_+ \qquad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq \frac{t^2}{1+t^2}\ e^{-at^2}\ ,$$

cette dernière fonction de la variable t étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment S inclus sans $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$, et que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad g'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^2\ e^{-xt^2}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t = g(x) - \int_0^{+\infty} e^{-xt^2}\ \mathrm{d}t\ .$$

Le changement de variable linéaire $t\sqrt{x} = u$ dans cette dernière intégrale montre que g vérifie, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle

$$g'(x) - g(x) = -\frac{G}{\sqrt{x}}\ .$$

b. En posant $g(x) = \lambda(x)\ e^x$ (méthode de "variation de la constante"), on obtient $\lambda'(x) = -G\ \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ donc (le choix de la borne fixe 0 étant permis car on a une intégrale généralisée convergente)

$$\lambda(x) = -G\ \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t + C\ .$$

La fonction $\lambda : x \mapsto e^{-x}\ g(x)$ étant continue sur $\mathbb{R}_+$, de $\lambda(0) = g(0) = \dfrac{\pi}{2}$, on tire $C = \dfrac{\pi}{2}$ et

$$g(x) = e^x\ \lambda(x) = e^x\ \left(\frac{\pi}{2} - G\ \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t \right)\ .$$

Enfin, la majoration immédiate $0 \leq \lambda(x) = e^{-x}\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t \leq \frac{\pi}{2}\ e^{-x}$ montre que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \lambda(x) = 0$, donc

$$\frac{\pi}{2} = G\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t = G\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u}\ 2u\ \mathrm{d}u = 2G^2\ .$$

Comme G est positif, on conclut

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\ \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ .$$

---

17. Pour $x > -1$, on pose $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\ t^x\ \mathrm{d}t$.

a. Montrer que g est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$.

b. Calculer $g'(x)$. En déduire $g(x)$.

- -

a. Pour $(x,t)\in]-1,+\infty[\times]0,1[$, posons $f(x,t)=\dfrac{(t-1)\,t^x}{\ln t}$, cela pourra toujours servir. En fixant $x\in]-1,+\infty[$, du fait que $\ln t\underset{t\to1}{\sim}t-1$, on constate que $\lim\limits_{t\to1}f(x,t)=\lim\limits_{t\to1}t^x=1$, l'intégrande est donc prolongeable par continuité au point 1 (l'intégrale est “faussement impropre” en ce point). Par ailleurs, lorsque $t\to0$, on a

$$f(x,t)\underset{t\to0}{\sim}\frac{t^x}{|\ln t|}=\frac{1}{|\ln t|\,t^{-x}}=o\Big(\frac{1}{t^{-x}}\Big)\ ,$$

et comme $-x<1$, la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{t^{-x}}$ est intégrable sur $]0,1]$; par comparaison de fonctions positives, on a l'intégrabilité de $t\mapsto f(x,t)$ sur $]0,1[$, d'où l'existence de $g(x)$.

On a ensuite $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)=(t-1)\,t^x=t^{x+1}-t^x$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[\times]0,1[$, et si on fixe $a>-1$, pour $(x,t)\in[a,+\infty[\times]0,1[$, on a la domination

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\Big|=(1-t)\,t^x\le(1-t)\,t^a\ ,$$

la fonction $t\mapsto(1-t)t^a$ étant intégrable sur $]0,1[$ puisque $a>-1$. Le théorème de dérivation des intégrales paramétrées s'applique alors : la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>-1$, elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$, et...

b.

$$\text{...}\ g'(x)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1\big(t^{x+1}-t^x\big)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}=-\frac{1}{(x+1)(x+2)}\ .$$

Par intégration, on a $g(x)=\ln\Big(\dfrac{x+2}{x+1}\Big)+C$, où C est une constante. Mais, pour $t\in]0,1[$, on a par concavité du logarithme, $\ln t\le t-1$, soit (ce sont des quantités négatives) : $|\ln t|\ge|t-1|=1-t$, donc $\Big|\dfrac{t-1}{\ln t}\Big|\le1$. Donc

$$|g(x)|=g(x)=\int_0^1\Big|\frac{t-1}{\ln t}\Big|\,t^x\,\mathrm{d}t\le\int_0^1t^x\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x+1}\quad\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\quad0\ .$$

On en déduit que $C=0$, donc $\forall x\in]-1,+\infty[\quad g(x)=\ln\Big(\dfrac{x+2}{x+1}\Big)$.

---

18. On pose $g(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi\cos(x\,\sin t)\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que g est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre deux dont g est solution.

c. Montrer que g est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

d. À l'aide de l'équation différentielle obtenue en **b.**, obtenir ce développement.

- -

a. Posons $f(x,t)=\cos(x\sin t)$ pour $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,\pi]$. Alors $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\sin(t)\ \sin(x\ \sin t) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = -\sin^2(t)\ \cos(x\ \sin t)\ .$$

Les applications partielles $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sont continues sur le segment $[0,\pi]$ donc intégrables sur ce segment. Et on a la domination

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\pi] \qquad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq 1\ ,$$

la fonction constante $t \mapsto 1$ étant intégrable sur le segment $[0,\pi]$. Le théorème de dérivation des intégrales à paramètre s'applique et montre que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Ce théorème donne aussi

$$g'(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(t)\ \sin(x\ \sin t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g''(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2(t)\ \cos(x\ \sin t)\,\mathrm{d}t\ .$$

b. Intégrons par parties en partant par exemple de $-\pi\ g'(x)$, on dérive le facteur $\sin(x\sin t)$ et on primitive le facteur $\sin(t)$:

$$\begin{aligned}
-\pi\ g'(x) &= \int_0^\pi \sin(t)\ \sin(x\ \sin t)\,\mathrm{d}t \\
&= \Big[-\cos(t)\ \sin(x\sin t)\Big]_{t=0}^{t=\pi} + x\int_0^\pi \cos^2(t)\ \cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t \\
&= x\int_0^\pi (1-\sin^2 t)\ \cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t \\
&= \pi\ x\ g(x) + \pi\ x\ g''(x)\ ,
\end{aligned}$$

donc g est solution de l'équation différentielle $xy'' + y' + xy = 0$.

c. La fonction cosinus étant développable en série entière sur $\mathbb{R}$, on peut écrire, pour tout x,

$$g(x) = \int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\ x^{2n}\ \sin^{2n}(t)}{(2n)!}\,\mathrm{d}t\ ,$$

et il ne reste plus qu'à intervertir série et intégrale. Or, pour tout x réel fixé, si on pose $f_n(t) = \dfrac{(-1)^n\ x^{2n}\ \sin^{2n}(t)}{(2n)!}$, on a la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ sur le segment $[0,\pi]$ puisque $\|f_n\|_\infty = \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ est le terme général d'une série convergente, l'interversion est donc permise. On obtient alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} W_n x^{2n}\ ,$$

en posant $W_n = \displaystyle\int_0^\pi \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$ (intégrales de Wallis). La fonction g est donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

d. On pourrait calculer par récurrence ces intégrales de Wallis et obtenir le développement explicite, mais l'énoncé demande d'exploiter l'équation différentielle!

Posons donc $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, donc $x\,f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n$, puis $f'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ et $x\,f''(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n$. On réinjecte dans l'équation différentielle:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n=0\ ,$$

soit, grâce à l'unicité du développement en série entière,

$$\begin{cases} a_1=0 \\ \forall n\in\mathbb{N}^* \quad (n+1)^2\,a_{n+1}=a_{n-1} \end{cases} .$$

On en déduit que $a_{2p+1}=0$ pour tout p (mais ce n'est pas une surprise, la fonction f étant évidemment paire) et que

$$\forall p\in\mathbb{N} \qquad a_{2p}=\frac{(-1)^p}{(2p)^2\,(2p-2)^2\cdots(2)^2}\,a_0=\frac{(-1)^p}{2^{2p}\,(p!)^2}\ .$$

Enfin, $a_0=f(0)=1$. Finalement

$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad f(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2^{2p}\,(p!)^2}\,x^{2p}\ .$$

---

19. Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}_+^*$ une fonction continue. Montrer que $\varphi : x\mapsto \int_0^1 \big(f(t)\big)^x\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$. En déduire $\lim_{x\to 0}\big(\varphi(x)\big)^{\frac{1}{x}}$.

- -

Posons $h(x,t)=\big(f(t)\big)^x=e^{x\,\ln f(t)}$ pour $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,1]$; alors h est continue (car produit, composée) sur $\mathbb{R}\times[0,1]$ (donc l'application partielle $t\mapsto h(x,t)$ est continue sur le segment $[0,1]$, ce qui garantit déjà l'existence de $\varphi(x)$), et admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)=\ln\big(f(t)\big)\cdot\big(f(t)\big)^x$.

Si S est un segment de $\mathbb{R}$, alors l'application $\dfrac{\partial h}{\partial x}$, qui est continue sur le pavé $S\times[0,1]$ (partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$), est bornée sur ce pavé : $\forall (x,t)\in S\times[0,1] \quad \left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right|\le M_S$; comme la fonction constante $t\mapsto M_S$ est intégrable sur le segment $[0,1]$, on a une condition de domination qui permet d'affirmer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment S. La fonction φ est alors $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \varphi'(x) = \int_{[0,1]} \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \ln\big(f(t)\big)\cdot\big(f(t)\big)^x\,\mathrm{d}t\ .$$

En particulier, $\varphi(0) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}t = 1$ et $\varphi'(0) = \displaystyle\int_0^1 \ln\big(f(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_{[0,1]} \ln\circ f$, notons K cette dernière intégrale.

La fonction φ admet donc un développement limité à l'ordre 1 en zéro, à savoir $\varphi(x) = 1 + K\,x + o(x)$, puis

$$\frac{1}{x}\,\ln\big(\varphi(x)\big) = \frac{1}{x}\,\ln\big(1 + K\,x + o(x)\big) = \frac{1}{x}\,\big(K\,x + o(x)\big) = K + o(1)\ ,$$

autrement dit $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\,\ln\big(\varphi(x)\big) = K$; en prenant l'exponentielle, on a

$$\lim_{x\to 0} \big(\varphi(x)\big)^{\frac{1}{x}} = e^K = \exp\left(\int_0^1 \ln\big(f(t)\big)\,\mathrm{d}t\right)\ .$$

---

20. On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x\,\mathrm{d}t$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition, et déterminer ses variations.

c. Pour $x \in D_f$, on pose $g(x) = (x+1)\,f(x)\,f(x+1)$. Montrer que $\forall x \in D_f \quad g(x+1) = g(x)$.

d*. Montrer que g est constante sur D_f.

---

21. On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

a. Ensemble de définition de f.

b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D_f.

c. Donner un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

d. Donner un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 0^+.

- -

a. Dans tous les cas, on a **(1)**: $\displaystyle\frac{e^{-t}}{x+t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-t}}{t}$, fonction intégrable au voisinage de $+\infty$.

Si $x > 0$, l'intégrande est une fonction de t continue sur $[0, +\infty[$ d'où l'existence de l'intégrale grâce à **(1)**.

Si $x = 0$, on a $\displaystyle\frac{e^{-t}}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t}$, d'où la non-intégrabilité.

Si $x < 0$, on retrouve le même problème d'intégrale divergente en la borne $-x \in \mathbb{R}_+^*$.

En conclusion, $D_f = \mathbb{R}_+^*$.

b. Posons $g(x,t) = \displaystyle\frac{e^{-t}}{x+t}$, alors $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, avec $\displaystyle\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t) = (-1)^k k!\,\frac{e^{-t}}{(x+t)^{k+1}}$.

Si on fixe $a > 0$, alors

$$\forall (x,t)\in [a,+\infty[\times \mathbb{R}_+ \quad \left|\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)\right| \le \frac{k!\, e^{-t}}{(t+a)^{k+1}} \le \frac{k!}{a^{k+1}}\, e^{-t}\ ,$$

fonction de t intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Cette domination permet d'affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec

$$\forall k\in\mathbb{N}\quad \forall x\in\mathbb{R}_+^* \qquad f^{(k)}(x) = (-1)^k\, k! \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t\ .$$

c. On a $\dfrac{e^{-t}}{x+t} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-t}}{x}$. On peut conjecturer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$, il reste à le prouver! Remarquons pour cela que

$$0 \le \frac{1}{x} - f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+t}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t\, e^{-t}}{x(x+t)}\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t\ .$$

L'intégrale (convergente!) $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$ est une constante, on a donc prouvé que $f(x) - \dfrac{1}{x} = O\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$ en $+\infty$, ce qui entraîne $f(x) - \dfrac{1}{x} = o\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$, soit $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

d. Posons le changement de variable $u = x+t$, on a alors

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{x-u}}{u}\,\mathrm{d}u = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \underset{x\to 0}{\sim} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u\ .$$

Or, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = \int_x^1 \frac{\mathrm{d}u}{u} + \int_x^1 \frac{e^{-u}-1}{u}\,\mathrm{d}u + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$. Le premier terme vaut $-\ln(x)$ et tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0, le deuxième a une limite finie qui est l'intégrale convergente $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-u}-1}{u}\,\mathrm{d}u$, le troisième est constant. En conclusion, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x)$.

---

22. Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ continues, telles que $\forall x\in I \quad u(x) < v(x)$. Soit $f : I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue. Montrer que l'application $g : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur I. *On pourra poser* $t = u(x) + s\,\big(v(x)-u(x)\big)$, *où s désigne une nouvelle variable.*

- -

Le changement de variable proposé donne

$$\forall x\in I \qquad g(x) = \big(v(x)-u(x)\big)\int_0^1 f\big(x\ ,\ (1-s)u(x) + s\,v(x)\big)\,\mathrm{d}s\ .$$

La fonction $\varphi : (x,s) \mapsto f\big(x\ ,\ (1-s)u(x)+s\,v(x)\big)$ est continue sur $I\times[0,1]$ et, si S est un segment inclus dans I, sa continuité sur la partie fermée bornée $S\times[0,1]$ de $\mathbb{R}^2$ permet de la majorer en valeur absolue par une constante M_S sur cette partie. Comme la fonction constante $s\mapsto M_S$ est intégrable sur le segment $[0,1]$, ceci nous fournit une domination valide pour appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètre: l'application

$$x \mapsto \int_0^1 f\big(x\ ,\ (1-s)u(x)+s\,v(x)\big)\,\mathrm{d}s$$

est donc continue sur I. Comme il en est de même de $v-u$, on déduit, par produit, que g est continue sur I.

Transformées de Laplace et de Fourier. Intégrales eulériennes

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, on note Tf ou encore $\widehat{f}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad Tf(x) = \widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-ixt}\, \mathrm{d}t\ .$$

La fonction $\widehat{f} = Tf$ est la **transformée de Fourier** *de f. L'application $T : f \mapsto Tf$ est la* **transformation de Fourier**.

---

23. On admet $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$. Montrer que l'application $f : \alpha \mapsto f(\alpha) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Trouver une équation différentielle vérifiée par f, en déduire son expression.

- -

Pour $(\alpha, x) \in \mathbb{R}^2$, posons $g(\alpha, x) = e^{-x^2}\, e^{-i\alpha x}$. Alors g est de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}^2$, et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, l'application partielle $x \mapsto g(\alpha, x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ puisque $|g(\alpha,x)| = e^{-x^2}$ (*remarquons que cela nous fournit une domination par une fonction intégrable ne dépendant que de x, ce qui garantit non seulement la définition de f, mais aussi sa continuité sur* $\mathbb{R}$).

On a $\dfrac{\partial g}{\partial \alpha}(\alpha, x) = -ix\, g(\alpha, x)$, d'où $\left|\dfrac{\partial g}{\partial \alpha}(\alpha, x)\right| = |x|\, e^{-x^2}$, la fonction $\psi : x \mapsto |x|\, e^{-x^2}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est $o\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$ au voisinage des deux infinis. On a ainsi obtenu une condition de domination qui permet d'affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec (formule de Leibniz)

$$f'(\alpha) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-x^2}\, e^{-i\alpha x}\, \mathrm{d}x\ .$$

Une intégration par parties (en choisissant $u' = -x\, e^{-x^2}$) conduit à l'équation différentielle du premier ordre $f'(\alpha) = -\dfrac{\alpha}{2}\, f(\alpha)$ (*détail du calcul laissé au lecteur*). On en déduit que $f(\alpha) = C\, e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$. Comme $f(0) = \sqrt{\pi}$ (intégrale de Gauss, donnée par l'énoncé), on a finalement $f(\alpha) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$.

24.a. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, montrer que sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}$, et que c'est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

b. Soit la fonction "créneau" φ définie par $\varphi(t) = 1$ si $t \in [-1, 1]$ et $\varphi(t) = 0$ sinon. Calculer sa transformée de Fourier $x \mapsto \widehat{\varphi}(x)$.

c. Soit a un réel strictement positif, soit la fonction f définie par $\forall t \in \mathbb{R}\quad f(t) = e^{-a|t|}$. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et expliciter sa transformée de Fourier $\widehat{f}$.

d. On suppose dans cette question que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et intégrable sur $\mathbb{R}$, et que sa dérivée f' est intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$, puis prouver la relation $\forall x \in \mathbb{R} \quad \widehat{f'}(x) = ix\,\widehat{f}(x)$

- -

a. On a $|f(t)\,e^{-ixt}| = |f(t)|$, et f est supposée intégrable sur $\mathbb{R}$ donc, pour tout réel x, la fonction $t \mapsto f(t)\,e^{-ixt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et l'intégrale impropre définissant $\widehat{f}(x)$ est convergente pour tout réel x.

Pour $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, posons $h(x,t) = f(t)\,e^{-ixt}$. La fonction h est continue par rapport à la variable x, continue par morceaux par rapport à la variable t, et on a la domination $|h(x,t)| \leq |f(t)|$ (*qui est en fait une égalité*) avec f intégrable sur $\mathbb{R}$. Le théorème de continuité sous le signe intégrale s'applique alors et garantit la continuité de la fonction $\widehat{f}$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction f étant intégrable sur $\mathbb{R}$, on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |\widehat{f}(x)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-ixt}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)\,e^{-ixt}|\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} |f| = \|f\|_1\ ,$$

ce qui montre que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

b. La fonction φ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et intégrable (car elle est nulle en dehors du segment $[-1,1]$), et $\forall x \in \mathbb{R} \qquad \widehat{\varphi}(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-ixt}\,\mathrm{d}t$. Pour $x = 0$, on obtient $\widehat{\varphi}(0) = 2$. Pour $x \neq 0$, on a

$$\widehat{\varphi}(x) = \frac{i}{x}\,(e^{-ix} - e^{ix}) = 2\,\frac{\sin x}{x}\ .$$

La transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ de la fonction φ est donc $\widehat{\varphi} = 2\,\mathrm{sinc}$, où sinc est la fonction **sinus cardinal**, à savoir $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ prolongée par continuité en zéro.

c. La fonction f est intégrable sur $[0,+\infty[$ car, sur cet intervalle, on a $f(t) = e^{-at}$ et c'est du cours! Comme f est paire, elle est aussi intégrable sur $]-\infty,0]$, donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}$. Bon, on calcule

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R} \qquad \widehat{f}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|}\,e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} e^{(a-ix)t}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+ix)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{a-ix}\,e^{(a-ix)t}\right]_{t\to-\infty}^{t=0} - \left[\frac{1}{a+ix}\,e^{-(a+ix)t}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} \\
&= \frac{1}{a-ix} + \frac{1}{a+ix} = \frac{2a}{a^2+x^2}\ .
\end{aligned}$$

Rappel : on a par exemple $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-(a+ix)t} = 0$ *car* $\left|e^{-(a+ix)t}\right| = e^{-at} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

d. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f(t) = f(0) + \displaystyle\int_0^t f'(u)\,\mathrm{d}u$ et l'intégrabilité de f' sur $\mathbb{R}$ montre que l'intégrale du second membre a une limite finie lorsque t tend vers $+\infty$. Ainsi, la fonction

f admet une limite finie l en $+\infty$, précisément $l = \lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(u)\,\mathrm{d}u$. Si cette limite l n'était pas nulle, alors au voisinage de $+\infty$, on pourrait écrire $f(t) \sim l$ et, la fonction constante l n'étant évidemment pas intégrable sur $[0,+\infty[$, la fonction f ne serait pas non plus intégrable sur cet intervalle. En conclusion, $l = \lim\limits_{+\infty} f = 0$. On prouve de même que $\lim\limits_{-\infty} f = 0$.

Soit $a > 0$. Intégrons par parties :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\, e^{-ixt}\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)\, e^{-ixt}\Big]_{t\to-\infty}^{t\to+\infty} + i\,x \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-ixt}\,\mathrm{d}t\ .$$

Cette i.p.p. est justifiée par l'étude précédente (le terme entre crochets admet des limites finies, ici nulles, aux bornes de l'intervalle d'intégration), il reste alors la relation

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \widehat{f'}\,(x) = ix\,\widehat{f}(x)\ .$$

Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ est une fonction continue par morceaux, la **transformée de Laplace** *de f est la fonction $\mathcal{L}[f]$ définie par*

$$\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, f(t)\,\mathrm{d}t$$

pour tout réel p tel que cette intégrale est convergente.

---

25. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe un réel p_0 tel que la fonction $t \mapsto e^{-p_0 t}\, f(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

a. Montrer que la transformée de Laplace $\mathcal{L}[f]$ est définie et continue sur l'intervalle $[p_0,+\infty[$.

b. Montrer que la fonction $\mathcal{L}[f]$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert $]p_0,+\infty[$ et que, sur cet intervalle, on a, pour tout n entier naturel, la relation $\big(\mathcal{L}[f]\big)^{(n)} = (-1)^n\,\mathcal{L}[g_n]$, où g_n est la fonction définie par $g_n(t) = t^n\, f(t)$.

- -

a. Soit $h : [p_0,+\infty[\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, $(p,t) \mapsto e^{-pt}\, f(t)$. Alors h est continue et on a la domination

$$\forall (p,t) \in [p_0,+\infty[\times\mathbb{R}_+ \qquad |h(p,t)| \le e^{-p_0 t}\,|f(t)|\ ,$$

cette fonction majorante étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre permet alors d'affirmer que la fonction $\mathcal{L}[f]$ est définie et continue sur $[p_0,+\infty[$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{\partial^n h}{\partial p^n}(p,t) = (-1)^n\, t^n\, e^{-pt}\, f(t) = (-1)^n\, e^{-pt}\, g_n(t)$. Fixons $p_1 > p_0$. On a alors la domination

$$\forall (p,t) \in [p_1,+\infty[\times\mathbb{R}_+ \qquad \left|\frac{\partial^n h}{\partial p^n}(p,t)\right| = e^{-pt}\,|g_n(t)| \le e^{-p_1 t}\,|g_n(t)|\ ,$$

et la fonction $t \mapsto e^{-p_1 t}\,|g_n(t)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$: en effet, par croissances comparées, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} t^n\, e^{-(p_1-p_0)t} = 0$, donc $e^{-p_1 t}\,|g_n(t)| = t^n\, e^{-p_1 t}\,|f(t)|$ est négligeable devant $e^{-p_0 t}\,|f(t)|$ lorsque t tend vers $+\infty$. On peut donc appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, et en déduire que la fonction $\mathcal{L}[f]$ est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout n, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout intervalle de la forme $[p_1, +\infty[$ avec $p_1 > p_0$, donc finalement sur $]p_0, +\infty[$. La formule de Leibniz donne alors

$$\big(\mathcal{L}[f]\big)^{(n)}(p) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^n h}{\partial p^n}(p,t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, g_n(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n\, \mathcal{L}[g_n](p)\ .$$

---

26. Théorème de la valeur finale

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, continue par morceaux, admettant une limite finie en $+\infty$: $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = l$. Montrer que la transformée $\mathcal{L}[f]$ est définie (au moins) sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\lim_{p\to 0^+} p\cdot\mathcal{L}[f](p) = l = \lim_{t\to+\infty} f(t)\ .$$

- -

Pour $p > 0$, le changement de variable linéaire $x = pt$ donne

$$p\,\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} f\Big(\frac{x}{p}\Big)\, e^{-x}\,\mathrm{d}x\ .$$

On veut montrer que cette intégrale tend vers l lorsque p tend vers 0. Utilisons pour cela le théorème de convergence dominée à paramètre continu. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\lim\limits_{p\to 0} f\Big(\dfrac{x}{p}\Big)\, e^{-x} = l\, e^{-x}$. Les fonctions $x \mapsto f\Big(\dfrac{x}{p}\Big)\, e^{-x}$ et $x \mapsto l\, e^{-x}$ sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$. Enfin, la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}_+$ (elle est bornée au voisinage de $+\infty$, i.e. sur un certain intervalle de la forme $[A, +\infty[$ avec $A > 0$ car elle admet une limite finie en $+\infty$, et elle est bornée aussi sur $[0, A]$ car elle est continue sur ce segment), on a donc la domination

$$\forall (p,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \qquad \left| f\Big(\frac{x}{p}\Big)\, e^{-x}\right| \le \varphi(x) = \|f\|_\infty\, e^{-x}\ ,$$

cette fonction φ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Le théorème s'applique donc et donne

$$\lim_{p\to 0} p\,\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} l\, e^{-x}\,\mathrm{d}x = l\ ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exercices avec Python

27. Soit $g :]0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^x$.

a. Prolonger g par continuité en 0.

b. Représenter graphiquement g. Justifier l'allure de g au voisinage de 0. Déterminer les coordonnées du minimum.

c. Donner une valeur approchée de $I = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

d. On admettra que $\displaystyle\int_0^1 (x \ \ln x)^n \, \mathrm{d}x = \frac{(-1)^n \, n!}{(n+1)^{n+1}}$ pour tout n entier naturel. Montrer que $\displaystyle I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

e. Écrire une fonction `calcul(e)` retournant la valeur de l'intégrale I avec une précision `e` passée en argument.