EXERCICES sur les ESPACES PRÉHILBERTIENS et EUCLIDIENS
PSI2 2025-2026

Produit scalaire, norme associée, orthogonalité

1. Soit E un espace préhilbertien réel. Soient f et g deux applications de E vers E telles que

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad \big(x|f(y)\big) = \big(g(x)|y\big) \ .$$

Montrer que f et g sont des endomorphismes de E.

2. Soit $E = \mathcal{C}^1\big([0,1], \mathbb{R}\big)$. Pour $f \in E$ et $g \in E$, on pose

$$< f, g >= \int_0^1 f'(t)\, g'(t)\, \mathrm{d}t + f(1)\, g(0) + f(0)\, g(1) \ .$$

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

3. Soient a et b deux vecteurs unitaires dans un espace préhilbertien réel E. Pour tout vecteur x non nul de E, on pose $\varphi(x) = \dfrac{(x|a)(x|b)}{\|x\|^2}$. Exprimer $\varphi(x)$ à l'aide des vecteurs $u = a + b$ et $v = a - b$. Déterminer les réels

$$m = \min_{x \in E\setminus\{0\}} \varphi(x) \qquad \text{et} \qquad M = \max_{x \in E\setminus\{0\}} \varphi(x) \ .$$

4. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Comparer les rangs des matrices A et $A^\top A$. *On pourra s'intéresser aux noyaux des applications linéaires canoniquement associées à ces matrices.*

5. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel constitué des suites réelles bornées. Si u et v sont deux suites appartenant à E, on pose $(u|v) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n v_n}{2^n}$.

a. Montrer que l'on définit bien ainsi un produit scalaire sur E.

b. On note F le sous-espace vectoriel de E constitué des suites "presque nulles", c'est-à-dire dont les termes sont nuls à partir d'un certain rang. Déterminer l'orthogonal de F. Le sous-espace F admet-il un supplémentaire orthogonal ? Déterminer $(F^\perp)^\perp$.

c. Montrer que F est dense dans E.

6*. Soit E un espace préhilbertien réel, soient $x_1, \cdots, x_n$ des vecteurs de E. On suppose qu'il existe un réel positif M tel que

$$\forall (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n \qquad \Big\| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k \Big\| \leq M \ .$$

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 \leq M^2$.

Familles orthogonales ou orthonormales

7. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $(P, Q) \in E^2$, on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$.

a. Montrer que l'on définit bien ainsi un produit scalaire sur l'espace vectoriel E.

b. Calculer $(X^p|X^q)$ pour p et q entiers naturels.

c. Orthonormaliser la famille $(1, X, X^2)$ pour ce produit scalaire.

8. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires d'un espace préhilbertien réel E, telle que $\forall x \in E \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2$. Montrer que cette famille est orthogonale, puis que c'est une base orthonormale de E.

9.a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad T_n(\cos\theta) = \cos n\theta \ .$$

On pourra procéder par récurrence, après avoir transformé en produit l'expression $\cos(n+2)x + \cos nx$.

b. Pour $(P, Q) \in \big(\mathbb{R}[X]\big)^2$, on pose

$$(P|Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \ .$$

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. Montrer que la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale dans cet espace préhilbertien.

10*. Soit E un espace euclidien, soit u un endomorphisme de E, de trace nulle.

a. Montrer qu'il existe un vecteur x non nul de E tel que $\big(u(x)|x\big) = 0$.

b. Montrer qu'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u a tous ses coefficients diagonaux nuls. *On pourra raisonner par récurrence sur la dimension de E.*

Projecteurs orthogonaux

11. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $I(a, b) = \displaystyle\int_0^{\pi} (a\sin x + b\cos x - x)^2\,\mathrm{d}x$. Déterminer le minimum de $I(a, b)$ lorsque (a, b) décrit $\mathbb{R}^2$.

12. L'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire $(A|B) = \mathrm{tr}(A^\top B)$. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1, soit $\mathcal{H}$ l'hyperplan constitué des matrices de trace nulle. Déterminer la distance $d(J, \mathcal{H})$.

13. Soit p un projecteur dans un espace euclidien E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E \quad \|p(x)\| \leq \|x\|$.

14. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Écrire la matrice A (relativement à la base canonique) du projecteur orthogonal sur le sous-espace vectoriel F défini par les équations

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases} .$$

15. L'espace $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique défini par la relation $(A|B) = \mathrm{tr}(A^\top B) = \sum_{i,j} a_{i,j} b_{i,j}$. Soit $M = (m_{i,j}) \in E$. Calculer la distance de la matrice M au sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques.

16. Soit E un espace euclidien de dimension n, soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de E, soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur orthogonal de rang r.

a. Montrer que $\forall x \in E \quad \|p(x)\|^2 = \big(p(x)|x\big)$.

b. Calculer la somme $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2$.

17. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux dans un espace euclidien E. Prouver l'équivalence

$$\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(q) \iff \forall x \in E \quad \big\|p(x)\big\| \leq \big\|q(x)\big\| \,.$$

Isométries. Matrices orthogonales.

18. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice que l'on suppose à la fois orthogonale et triangulaire supérieure. Montrer que A est diagonale et que ses coefficients diagonaux valent 1 ou -1.

19.a. Soit E un espace euclidien. Soit $\mathcal{B}$ une base de E, soit $\mathcal{E}$ son orthonormalisée. Montrer que la matrice de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux strictement positifs.

b. En déduire que, si A est une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors il existe une matrice orthogonale Q et une matrice triangulaire supérieure R à coefficients diagonaux strictement positifs telles que $A = QR$. En utilisant éventuellement l'exercice **18.** ci-dessus, montrer l'unicité de cette "décomposition QR".

20. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathrm{O}(n)$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i,j} |a_{ij}| \leq n\sqrt{n}$ et $\displaystyle\Big|\sum_{i,j} a_{ij}\Big| \leq n$. *On pourra utiliser le vecteur $U = (1, 1, \cdots, 1)$ de $\mathbb{R}^n$.*

21. Soit $u \in \mathrm{O}(E)$, où E est un espace euclidien.

a. Montrer que $\big(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)\big)^{\perp} = \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E)$.

b. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère l'endomorphisme $r_k = \dfrac{1}{k} \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} u^j$. Soit x un vecteur de E. Déterminer $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} r_k(x)$.

22. Soit n un entier naturel avec $n \geq 2$. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.

a. Montrer que la seule valeur propre réelle possible de A est 0. En déduire que la matrice $I_n - A$ est inversible.

b. Montrer que les matrices $I_n + A$ et $(I_n - A)^{-1}$ commutent.

c. Soit la matrice $R = (I_n + A)(I_n - A)^{-1}$.

i. Montrer que $\det(R) = 1$.

ii. Montrer que $R \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

iii. Montrer que le réel -1 n'est pas valeur propre de R.

iv. Prouver la relation $A = (R + I_n)^{-1}(R - I_n)$.

d. L'application $\varphi : \begin{cases} \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) & \to \ \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \\ \quad A & \mapsto \ (I_n + A)(I_n - A)^{-1} \end{cases}$ est-elle injective ? Est-elle surjective ?

Matrices et endomorphismes symétriques. Théorème spectral.

23. Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M\,(M^\top M)^2 = I_n$.

24. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A \neq 0$ et $A^2 = A^\top$.

a. Donner un polynôme annulateur de A.

b. On suppose que $0 \in \mathrm{Sp}(A)$. Déterminer alors $\mathrm{Sp}(A)$. Montrer que A est semblable à $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec une matrice de passage orthogonale.

25. Soit E un espace euclidien, soit u un endomorphisme symétrique de E, de valeurs propres (distinctes) $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, rangées dans l'ordre croissant ($\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m$). Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, notons E_i le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i.

a. Montrer que $\forall x \in E \quad \lambda_1 \|x\|^2 \leq \big(u(x)|x\big) \leq \lambda_m \|x\|^2$.

b. Pour quels vecteurs x l'une des deux inégalités ci-dessus est-elle une égalité ?

c. Soit M une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $S = \dfrac{1}{2}\,(M + M^\top)$. On note α (resp. β) la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de S. Montrer que toutes les valeurs propres réelles de M appartiennent à l'intervalle $[\alpha, \beta]$. Qu'en déduit-on lorsque M est antisymétrique ?

26. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice-colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$X^\top X = n \qquad \text{et} \qquad X^\top A X = \mathrm{tr}(A)\ .$$

Indication. Considérer l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice $M = \dfrac{1}{2}(A + A^\top)$.

27. Soit A une matrice symétrique réelle. Montrer que

$$\big(\mathrm{tr}(A)\big)^2 \leq \mathrm{tr}(A^2) \cdot \mathrm{rg}(A)\ .$$

28. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.

a. Montrer que, pour tout vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $X^\top A X = 0$.

b. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont strictement positives. Montrer que la matrice $M = A + B$ est inversible.

29. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est diagonale si et seulement si A est symétrique et a pour coefficients diagonaux ses valeurs propres. *On pourra utiliser la norme* $\|\cdot\|$ *sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *définie par* $\|A\| = \sqrt{\mathrm{tr}(A^\top A)}$.

30.a. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont positifs ou nuls. Montrer que

$$\forall V \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{tr}(DV) \leq \mathrm{tr}(D)\ .$$

b. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont positives ou nulles. Montrer que

$$\forall U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{tr}(AU) \leq \mathrm{tr}(A)\ .$$

31. Soit E un espace euclidien. Un endomorphisme autoadjoint u de E est dit **positif** si on a $\forall x \in E \quad \big(u(x)|x\big) \geq 0$.

a. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint, démontrer que u est positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.

b. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint positif. Montrer qu'il existe un endomorphisme autoadjoint positif v tel que $v^2 = u$.

c*. Montrer l'unicité de v dans la question précédente.

32. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont positives. Montrer l'équivalence

$$AS = SA \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists k \in \mathbb{N}^* \;\; AS^k = S^k A \ .$$

33. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ ses valeurs propres (comptées avec leur multiplicité). Montrer que $\displaystyle\sum_{i,j} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$.

34. Soit E un espace euclidien, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint défini positif. Montrer l'inégalité

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad (x|y)^2 \leq \big(u(x)|x\big)\,\big(u^{-1}(y)|y\big)\ .$$

35. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique réelle.

a. Montrer que A^2 est symétrique réelle et que $\mathrm{Sp}(A^2) \subset \mathbb{R}_-$.

b. On suppose A inversible. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, à valeurs propres imaginaires pures.

c. Montrer que $\mathrm{Ker}(A^2) = \mathrm{Ker}(A)$.

d.* En utilisant **c.**, montrer que le résultat du **b.** est vrai même si A n'est pas inversible.

36. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices carrées d'ordre n.

a. Montrer que les matrices $A^\top A$ et $B^\top B$ sont symétriques positives.

On note α la plus grande valeur propre de $A^\top A$, et β la plus grande valeur propre de $B^\top B$.

b. Prouver, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'inégalité $X^\top A^\top AX \leq \alpha\, X^\top X$.

c. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres réelles de la matrice A ?

d. Soit λ une valeur propre réelle de la matrice $M = A^\top B$. Montrer que $|\lambda| \leq \sqrt{\alpha\beta}$.

37*. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ qui commutent ($AB = BA$).
Montrer que $AB \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

38. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence

$$X^\top AX = 0 \iff AX = 0\ .$$

39. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = \min\{i,j\}$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on considère la matrice $J_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1, et on pose $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En utilisant les matrices A_k, montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

40.a. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $x_1, \cdots, x_n$ des points de I. Prouver l'inégalité

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ .$$

b. Soit $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Prouver l'inégalité $\sqrt[n]{\det(B)} \leq \dfrac{1}{n}\,\mathrm{tr}(B)$.

c. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(A) \leq \displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$. *On pourra poser* $b_{i,j} = \dfrac{a_{i,j}}{\sqrt{a_{i,i}\, a_{j,j}}}$.

Étude du plan et de l'espace euclidiens

41. Reconnaître les endomorphismes de l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^3$ représentés par les matrices suivantes:

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}\ .$$

42. Écrire la matrice, dans $\mathbb{R}^3$, de la rotation d'axe D dirigé et orienté par le vecteur $\overrightarrow{u} = (1,1,1)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

43. Un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ est représenté par la matrice $M = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale. Éléments caractéristiques de f ?

44. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} a^2 & ab+c & ac-b \\ ab-c & b^2 & bc+a \\ ac+b & bc-a & c^2 \end{pmatrix}$ avec a, b, c réels tels que $a^2+b^2+c^2 = 1$.

a. Décomposer M en $M = S + A$ avec S symétrique et A antisymétrique. Interpréter géométriquement les matrices S et A.

b. Interpréter géométriquement l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.

45. Soit E un espace euclidien orienté de dimension trois, soit a un vecteur non nul de E.

a. Montrer que l'application $f : x \mapsto a \wedge x$ est un endomorphisme de E. Préciser son noyau et son image.

b. Soit $b \in E$. Calculer $a \wedge (a \wedge b)$. Préciser à quelles conditions sur b l'équation $a \wedge x = b$ admet des solutions, et résoudre alors complètement cette équation.

46. Soit t un réel, soit la matrice antisymétrique $A = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$, soit $R = (I_2 + A)(I_2 - A)^{-1}$. Montrer que R est la matrice d'une rotation dont on précisera l'angle en fonction du réel t.