DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES numéro 5b

PSI2 2025-2026 **Durée: 4 heures** **17/01/2026**

EXERCICE 1

Dans cet exercice, on considère l'équation différentielle

$$(\mathbf{E}) \ : \qquad x^2(1-x)\,y'' - x(1+x)\,y' + y = 2x^3\ ,$$

ainsi que l'équation homogène associée

$$(\mathbf{H}) \ : \qquad x^2(1-x)\,y'' - x(1+x)\,y' + y = 0\ .$$

PARTIE A.

Dans cette première partie, on recherche les solutions développables en série entière de l'équation homogène **(H)**. On fixe une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série entière associée $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence r non nul. Pour $x \in]-r, r[$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-r, r[$, et exprimer f' et f'' comme sommes de séries entières.

2. Montrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n\geq 2}$ de nombres réels non nuls telle que

$$\forall x \in]-r, r[\qquad x^2(1-x)\,f''(x) - x(1+x)\,f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n\,(a_n - a_{n-1})\,x^n\ .$$

3. En déduire quelles sont les solutions de **(H)** qui sont développables en série entière sur $]-1, 1[$.

PARTIE B.

On note I l'un des intervalles $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$. Soit $y : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On définit la fonction $z : I \to \mathbb{R}$ par la relation

$$\forall x \in I \qquad z(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) y(x)\ .$$

4. Montrer que z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, et exprimer z' et z'' à l'aide de y, y' et y''.

5. Montrer que y est solution de **(E)** sur I si et seulement si z est solution sur I de l'équation différentielle

$$(\mathbf{F}) \ : \qquad x\,z'' + z' = 2x$$

6. En déduire l'ensemble des solutions sur I de l'équation différentielle **(E)**.

PARTIE C.

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $g_\lambda(x) = \dfrac{x^3}{2(1-x)} + \dfrac{\lambda\, x}{1-x}$.

7. Développer l'expression $g_\lambda(1+t)$ pour $t \in \mathbb{R}^*$.

8. En déduire qu'il existe une seule valeur de λ pour laquelle la fonction g_λ admet une limite finie au point 1.

9. En utilisant le cours sur les séries entières, montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{1-x} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ -1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

10. Quelles sont les solutions de l'équation différentielle **(E)** sur $\mathbb{R}_+^*$?

EXERCICE 2

1. Pour k et n entiers naturels non nuls, on pose $S_k(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k$. En considérant par exemple une somme de Riemann, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, on a $S_k(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^{k+1}}{k+1}$.

On rappelle que $S_1(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ *et* $S_2(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

On considère maintenant une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n, et on effectue k tirages avec remise dans cette urne. Pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, on note X_j le numéro obtenu lors du j-ième tirage. On suppose que la loi de chaque X_j est uniforme sur $[\![1, n]\!]$, et que les variables $X_1, \cdots, X_k$ sont indépendantes. On définit enfin une variable aléatoire U_k par

$$U_k = \min(X_1, \cdots, X_k) .$$

2. Exprimer $\mathrm{E}(X_1)$, $\mathrm{E}(X_1^2)$, puis $\mathrm{V}(X_1)$ en fonction de n.

3. Montrer que $P(U_k \geq i) = \left(\dfrac{n-i+1}{n}\right)^k$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

4. Prouver les relations

$$\mathrm{E}(U_k) = \sum_{i=1}^{n} P(U_k \geq i) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{E}(U_k^2) = \sum_{i=1}^{n} (2i-1)\, P(U_k \geq i) .$$

5. Exprimer $\mathrm{E}(U_k)$ en fonction de n à l'aide de l'expression $S_k(n)$ introduite dans la question **1.**, puis donner un équivalent de $\mathrm{E}(U_k)$ lorsque n tend vers l'infini, l'entier k étant fixé.

PROBLÈME

Dans tout ce problème, la lettre a désigne un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$.

A. Calcul d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

1. Montrer que l'intégrale $K(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a\,(1+t)}$ est convergente.

On posera $I(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^a\,(1+t)}$ et $J(a) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a\,(1+t)}$.

2. À l'aide d'un changement de variable simple, prouver la relation $J(a) = I(1-a)$.

3. Soit N un entier naturel. Prouver la relation

$$\forall t \in\,]0,1] \qquad \frac{1}{t^a\,(1+t)} = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n t^{n-a} + \frac{(-1)^{N+1}\, t^{N+1-a}}{1+t} \ .$$

4. Déterminer $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{N+1-a}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

5. En déduire que $I(a) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-a+1}$.

6. Montrer que $J(a) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+a-1}$.

7. Prouver la relation

$$K(a) = \frac{1}{1-a} + 2(a-1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-(1-a)^2} \ .$$

On admettra la relation suivante, valable pour tout réel x qui n'est pas un entier relatif :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\,(-1)^{n-1}\,x}{n^2-x^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} - \frac{1}{x} \ .$$

Pour la culture, cette relation admise est un "**développement eulérien**" *proche des relations que vous avez démontrées dans le* DM 3, *et qui peut s'obtenir par des méthodes similaires.*

8. Montrer que $K(a) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi a)}$.

B. La fonction Gamma d'Euler.

On pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour tout réel x tel que cette intégrale converge.

Pour $x \geq 0$, on pose $f_a(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^a\,(1+t)}\,\mathrm{d}t$.

9. Montrer que l'intégrale $\Gamma(x)$ est convergente si et seulement si $x > 0$.

10. Montrer que la fonction f_a est bien définie et continue sur $[0,+\infty[$, et calculer $f_a(0)$.

11. Montrer que la fonction f_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

12. Montrer que f_a est solution, sur $\mathbb{R}_+^*$, de l'équation différentielle

$$(\mathbf{E}): \qquad y' - y = -\frac{\Gamma(1-a)}{x^{1-a}} .$$

13. En déduire que $0 \leq f_a(x) \leq \dfrac{\Gamma(1-a)}{x^{1-a}}$ pour $x > 0$, puis déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x)$.

14. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^{1-a}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Pour $x \geq 0$, on pose $g_a(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{1-a}}\,\mathrm{d}t$.

15. Montrer que la fonction g_a est continue sur $[0,+\infty[$, et que $\lim\limits_{x\to+\infty} g_a(x) = 0$.

16. Montrer que la fonction g_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et exprimer sa dérivée.

C. La formule des compléments.

17. Déterminer les solutioins de l'équation différentielle homogène **(E0):** $y' - y = 0$.

18. Montrer que la fonction $h_a : x \mapsto \Gamma(1-a)\, e^x\, g_a(x)$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation **(E)** introduite à la question **12.**

19. Montrer qu'il existe un réel C tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad h_a(x) = f_a(x) + C\, e^x ,$$

puis déterminer ce réel C (on fera tendre x vers $+\infty$).

20. Prouver la **formule des compléments**:

$$\forall a \in]0,1[\qquad \Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(a\pi)} .$$