CORRIGÉ du D.S. de MATHÉMATIQUES numéro 5b
PSI2 2025-2026

EXERCICE 1

d'aprés CCINP, 2019, filière PC

PARTIE A.

1. On sait que toute fonction somme d'une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle de convergence $]-r,r[$, et que l'on obtient ses dérivées successives par dérivation terme à terme. Donc, pour $x \in]-r,r[$, on a

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n\, x^{n-1} \quad \text{et} \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n\, x^{n-2}\ .$$

2. Pour $x \in]-r,r[$, posons $A(x) = x^2(1-x)\,f''(x) - x(1+x)\,f'(x) + f(x)$. Alors

$$\begin{aligned}
A(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=3\text{ (ou 2)}}^{+\infty} (n-1)(n-2)a_{n-1}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= a_0 + (a_1 - a_1)x + \sum_{n=2}^{+\infty} \Big((n-1)^2\, a_n - (n-1)^2\, a_{n-1} \Big)\, x^n \\
&= a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n\,(a_n - a_{n-1})\, x^n
\end{aligned}$$

en posant $b_n = (n-1)^2$ pour tout $n \geq 2$, et b_n est bien non nul.

3. Par unicité du développement en série entière, la fonction f est donc solution de **(H)** sur $]-r,r[$ si et seulement si $\begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geq 2 \quad a_n = a_{n-1} \end{cases}$. On a alors $f(x) = a_1 \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$, le coefficient a_1 restant arbitraire.

En dehors du cas trivial $a_1 = 0$ où f est la fonction nulle, qui est bien une solution de **(H)** développable en série entière sur $\mathbb{R}$ (dans ce cas $r = +\infty$), on reconnaît une série géométrique de rayon de convergence $r = 1$, et de somme $f(x) = a_1 \dfrac{x}{1-x}$.

Les solutions de **(H)** développables en série entière sur $]-1,1[$ sont donc les fonctions

$$x \mapsto \alpha\, \frac{x}{1-x}\ , \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}\ .$$

PARTIE B.

4. La fonction z est de classe $\mathcal{C}^2$ comme produit de deux fonctions du même métal. On obtient

$$z'(x) = -\frac{1}{x^2}\, y(x) + \left(\frac{1}{x} - 1\right) y'(x)\ ,$$

puis

$$z''(x) = \frac{2}{x^3}\, y(x) - \frac{2}{x^2}\, y'(x) + \left(\frac{1}{x} - 1\right) y''(x)\ .$$

5. Partons de l'équation **(F)**:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{F}) \quad &\iff \quad x\,z''(x) + z'(x) = 2x \\
&\iff \quad \frac{2}{x^2}\,y(x) - \frac{2}{x}\,y'(x) + (1-x)\,y''(x) - \frac{1}{x^2}\,y(x) + \Big(\frac{1}{x} - 1\Big)\,y'(x) = 2x \\
&\iff \quad 2\,y(x) - 2x\,y'(x) + x^2(1-x)\,y''(x) - y(x) + x(1-x)\,y'(x) = 2x^3 \\
&\iff \quad x^2(1-x)\,y''(x) - x(1+x)\,y'(x) + y(x) = 2x^3 \iff (\mathbf{E})\ .
\end{aligned}$$

Remarquons que ce calcul revient à résoudre **(E)** sur I en posant le changement de fonction inconnue $y(x) = \dfrac{x}{1-x}\,z(x)$. Comme, d'après la question **3.**, $y_0 = \dfrac{x}{1-x}$ est une solution de l'équation homogène **(H)** ne s'annulant pas sur I, ce n'est rien d'autre que la méthode de variation de la constante (ou méthode de Lagrange) vue en cours.

6. Ne nous interdisons pas d'être astucieux puisqu'un œil exercé aura reconnu dans le premier membre de l'équation **(F)** la dérivée d'un produit! En effet,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{F}) \quad &\iff \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(x\,z'(x)\big) = 2x \\
&\iff \quad x\,z'(x) = x^2 + C \\
&\iff \quad z'(x) = x + \frac{C}{x} \\
&\iff \quad z(x) = \frac{x^2}{2} + C\,\ln(x) + D \\
&\iff \quad y(x) = \frac{x^3}{2(1-x)} + \frac{C\,x\,\ln(x)}{1-x} + \frac{D\,x}{1-x}\ ,
\end{aligned}$$

où C et D sont deux constantes arbitraires.

PARTIE C.

7. Allons-y!

$$g_\lambda(1+t) = \frac{(1+t)^3 + 2\lambda(1+t)}{-2t} = \frac{t^3 + 3t^2 + 3t + 1 + 2\lambda t + 2\lambda}{-2t} = -\frac{t^2}{2} - \frac{3t}{2} - \frac{2\lambda+3}{2} - \frac{2\lambda+1}{2t}\ .$$

8. La fonction g_λ admet une limite finie au point 1 si et seulement si $g_\lambda(1+t)$ admet une limite finie lorsque t tend vers 0, donc si et seulement si $2\lambda + 1 = 0$, donc **ssi** $\lambda = -\dfrac{1}{2}$. Il est clair que, dans ce cas, la fonction g_λ (prolongée par continuité au point 1) est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est alors polynomiale.

9. Pour $t \in]-1, +\infty[$, posons $H(t) = h(1+t)$. Alors $H(t) = \begin{cases} -\dfrac{\ln(1+t)}{t} & \text{si} \quad t \neq 0 \\ -1 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$.

Pour $t \in]-1, 1[$, on a $H(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{n-1}}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^n}{n+1}$. La fonction H est développable en série entière sur $]-1, 1[$, elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle. Elle est par ailleurs clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ (comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas). Elle est donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$. Par translation de la variable, h est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

10. Si y est une solution de **(E)** sur $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$, alors elle est solution de **(E)** sur $]0,1[$ et aussi sur $]1,+\infty[$. D'après la question **6.**, il existe donc quatre constantes λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 telles que

$$y(x) = \begin{cases} g_{\lambda_1}(x) + \mu_1\, h(x) & \text{si} \quad x \in]0,1[\\ g_{\lambda_2}(x) + \mu_2\, h(x) & \text{si} \quad x \in]1,+\infty[\end{cases} .$$

Si $\lambda_1 \neq -\dfrac{1}{2}$ (ou si $\lambda_2 \neq -\dfrac{1}{2}$), alors une telle fonction y aura une limite à gauche (ou à droite) infinie au point 1, d'après la question **8.**. Il est donc nécessaire que $\lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$.
On a alors

$$y(x) = \begin{cases} g_{-1/2}(x) + \mu_1\, h(x) & \text{si} \quad x \in]0,1[\\ g_{-1/2}(x) + \mu_2\, h(x) & \text{si} \quad x \in]1,+\infty[\end{cases} .$$

Ensuite, pour que y soit continue au point 1, il est nécessaire que $\mu_1 = \mu_2$. *En effet, la fonction y explicitée ci-dessus admet $g_{-1/2}(1) - \mu_1$ et $g_{-1/2}(1) - \mu_2$ pour limites à gauche et à droite au point 1, ces deux valeurs doivent être égales.* On a finalement nécessairement

$$y(x) = g_{-1/2}(x) + \mu\, h(x) = -\frac{x(1+x)}{2} + \mu\, \frac{x\, \ln(x)}{1-x} ,$$

où μ est une constante arbitraire (la fonction étant prolongée par continuité en lui donnant la valeur $-\mu - 1$ au point 1).

Réciproquement, ces fonctions conviennent puisqu'elles sont alors de classe $\mathcal{C}^\infty$ (donc $\mathcal{C}^2$) sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question **9.** et qu'elles sont solutions de **(E)** sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.

EXERCICE 2

d'aprés e3a, 2018, filière PC

1. On écrit $S_k(n) = n^{k+1} \times \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^k$, on reconnaît ainsi une somme de Riemann puisque

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^k \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad \int_0^1 t^k\, \mathrm{d}t = \frac{1}{k+1} .$$

On en déduit l'équivalent proposé.

2. On calcule $\mathrm{E}(X_1) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \times i = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$ puis, par la formule de transfert,

$$\mathrm{E}(X_1^2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \times i^2 = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

et enfin, par la formule de Koenig-Huygens, $\mathrm{V}(X_1) = \mathrm{E}(X_1^2) - \big(\mathrm{E}(X_1)\big)^2 = \dfrac{n^2-1}{12}$.

3. Pour tout $j \in [\![1,k]\!]$, on a $P(X_j \geq i) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{n-i+1}{n}$. Ensuite, par indépendance des variables X_j avec $1 \leq j \leq k$,

$$P(U_k \geq i) = P\left(\bigcap_{j=1}^{k} \{X_j \geq i\}\right) = \prod_{j=1}^{k} P(X_j \geq i) = \left(\frac{n-i+1}{n}\right)^k .$$

4. Comme $\{U_k = i\} = \{U_k \geq i\} \setminus \{U_k \geq i+1\}$ (complémentaire), on a

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(U_k) &= \sum_{i=1}^{n} i\, P(U_k = i) \;=\; \sum_{i=1}^{n} i\, \big(P(U_k \geq i) - P(U_k \geq i+1)\big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} i\, P(U_k \geq i) - \sum_{i=2}^{n+1} (i-1)\, P(U_k \geq i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(i - (i-1)\big)\, P(U_k \geq i) \;=\; \sum_{i=1}^{n} P(U_k \geq i)\ . \end{aligned}$$

Par un calcul analogue, avec la formule de transfert,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(U_k^2) &= \sum_{i=1}^{n} i^2\, P(U_k = i) \;=\; \sum_{i=1}^{n} i^2\, \big(P(U_k \geq i) - P(U_k \geq i+1)\big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} i^2\, P(U_k \geq i) - \sum_{i=2}^{n+1} (i-1)^2\, P(U_k \geq i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(i^2 - (i-1)^2\big)\, P(U_k \geq i) \;=\; \sum_{i=1}^{n} (2i-1)\, P(U_k \geq i)\ . \end{aligned}$$

5. Donc, par le changement d'indice $i' = n - i + 1$,

$$\mathrm{E}(U_k) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n-i+1}{n}\right)^k = \frac{1}{n^k} \sum_{i'=1}^{n} (i')^k = \frac{S_k(n)}{n^k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n}{k+1}\ .$$

PROBLÈME

d'aprés EPITA, 2025, filière PT

A. Calcul d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

1. La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{t^a\,(1+t)}$ est continue sur $]0,+\infty[$, avec $\varphi(t) \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^a}$ ce qui entraîne son intégrabilité en 0 puisque $a < 1$, et $\varphi(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{a+1}}$ ce qui entraîne son intégrabilité en $+\infty$ puisque $a + 1 > 1$. Elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, d'où l'existence de l'intégrale $K(a)$.

2. Le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$ donne

$$J(a) = \int_1^0 \frac{-\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2}}{\dfrac{1}{u^a}\left(1+\dfrac{1}{u}\right)} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^{1-a}\,(u+1)} = I(1-a)\ .$$

3. On reconnaît une série géométrique de raison $-t$ (différente de 1) dont on sait exprimer la somme partielle d'ordre N:

$$\sum_{n=0}^{N} (-1)^n t^{n-a} = \frac{1}{t^a} \sum_{n=0}^{N} (-t)^n = \frac{1}{t^a}\,\frac{1-(-t)^{N+1}}{1-(-t)} = \frac{1}{t^a(1+t)} - \frac{1}{t^a}\,\frac{(-1)^{N+1}\,t^{N+1}}{1+t}\ ,$$

ce qui est la relation demandée (en réordonnant un peu).

4. Par simple majoration, on a $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{N+1-a}}{1+t}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^{N+1-a}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{N+2-a}$ et, comme ce majorant tend vers 0, il résulte du théorème d'encadrement que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{N+1-a}}{1+t}\,\mathrm{d}t = 0$.

5. On intègre sur l'intervalle $]0,1]$ la relation obtenue en **Q3.**:

$$\forall N \in \mathbb{N} \qquad I(a) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^a\,(1+t)} = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 t^{n-a}\,\mathrm{d}t + (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^{N+1-a}}{1+t}\,\mathrm{d}t\ ,$$

et en faisant tendre N vers l'infini, grâce à **Q4.**, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-a+1} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n-a+1} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 t^{n-a}\,\mathrm{d}t = I(a)\ .$$

Ce calcul montre la convergence de la série numérique dans le membre de gauche, mais cette convergence peut se déduire aussi du théorème des séries alternées.

6. En utilisant **Q2.** puis un décalage d'indice,

$$J(a) = I(1-a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-(1-a)+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+a} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-1+a}\ .$$

7. Par la relation de Chasles, $K(a) = I(a) + J(a)$, donc

$$\begin{aligned} K(a) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-a+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-1+a} = \frac{1}{1-a} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+(1-a)} - \frac{1}{n-(1-a)} \right) \\ &= \frac{1}{1-a} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \times 2(a-1)}{n^2-(1-a)^2}\ . \end{aligned}$$

8. En utilisant le "développement eulérien" admis par l'énoncé, on reconnaît, en choisissant $x = 1-a$, qui n'est pas entier relatif,

$$K(a) = \frac{\pi}{\sin\big(\pi(1-a)\big)} = \frac{\pi}{\sin(\pi-\pi a)} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}\ .$$

B. La fonction Gamma d'Euler.

9. Posons $u(x,t)=t^{x-1}\,e^{-t}$ pour $(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$. Alors $t\mapsto u(x,t)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a $u(x,t)\underset{t\to 0}{\sim}t^{x-1}=\dfrac{1}{t^{1-x}}$, donc $t\mapsto u(x,t)$ est intégrable en 0 si et seulement si $1-x<1$, soit **ssi** $x>0$.

Et, pour tout réel x, on a $\lim\limits_{t\to+\infty}t^2u(x,t)=0$ par croissances comparées, donc $t\mapsto u(x,t)$ est toujours intégrable en $+\infty$.

En conclusion, l'intégrale généralisée $\Gamma(x)$ est convergente si et seulement si $x>0$.

10. Posons $v(x,t)=\dfrac{e^{-xt}}{t^a\,(1+t)}$ pour $(x,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+^*$. L'application v est continue (par opérations) sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+^*$, ce qui entraîne la continuité des applications partielles, puis on a la domination

$$\forall(x,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+^*\qquad \big|v(x,t)\big|=v(x,t)\leq\frac{1}{t^a(t+1)}\ ,$$

l'application $\varphi:t\mapsto\dfrac{1}{t^a(t+1)}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après **Q1.**

Ceci permet d'appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètre: la fonction $f_a:x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}v(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $f_a(0)=K(a)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi a)}$.

11. Pour tout $t>0$, l'application partielle $x\mapsto v(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,t)=-\dfrac{e^{-xt}}{t^{a-1}\,(1+t)}$. Si $S=[\alpha,\beta]$ est un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, i.e. $0<\alpha<\beta$, on a la domination

$$\forall(x,t)\in S\times\mathbb{R}_+^*\qquad \left|\frac{\partial v}{\partial x}(x,t)\right|\leq\psi(t):=\frac{e^{-\alpha t}}{t^{a-1}\,(1+t)}\ ,$$

et cette fonction ψ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$: en effet, on a $\psi(t)\underset{t\to0}{\sim}\dfrac{1}{t^{a-1}}$ avec $a-1<1$, et on a $\lim\limits_{t\to+\infty}t^2\psi(t)=0$ par croissances comparées, ce qui assure l'intégrabilité en 0 et en $+\infty$.

Du théorème de dérivation des intégrales à paramètre, on déduit que f_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\qquad f_a'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial v}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t=-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{t^{a-1}\,(1+t)}\,\mathrm{d}t\ .$$

Il est alors clair que $f_a'(x)$ est négatif, on l'utilisera en **Q13.**

12. On calcule, pour $x>0$,

$$\begin{aligned}
f_a'(x)-f_a(x) &= -\int_0^{+\infty}\left(\frac{t\,e^{-xt}}{t^a\,(1+t)}+\frac{e^{-xt}}{t^a\,(1+t)}\right)\mathrm{d}t\ =\ -\int_0^{+\infty}e^{-xt}\,t^{-a}\,\mathrm{d}t\\
&= -\int_0^{+\infty}e^{-u}\left(\frac{u}{x}\right)^{-a}\frac{\mathrm{d}u}{x}\ =\ -\frac{1}{x^{1-a}}\int_0^{+\infty}e^{-u}\,u^{(1-a)-1}\,\mathrm{d}u\\
&= -\frac{\Gamma(1-a)}{x^{1-a}}\ .
\end{aligned}$$

13. Pour $x > 0$, on a donc $\dfrac{\Gamma(1-a)}{x^{1-a}} - f_a(x) = -f_a'(x) \geq 0$, donc $f_a(x) \leq \dfrac{\Gamma(1-a)}{x^{1-a}}$.

Par ailleurs, l'inégalité $0 \leq f_a(x)$ est immédiate.

Or $1-a > 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\Gamma(1-a)}{x^{1-a}} = 0$, l'encadrement obtenu montre que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = 0$.

14. Cette fonction $\xi : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t^{1-a}}$ est continue sur $]0,+\infty[$ avec $\xi(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-a}}$ où $1-a < 1$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\,\xi(t) = 0$, elle est donc intégrable sur $]0,+\infty[$.

15. En posant $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{1-a}}\,\mathrm{d}t$, par la relation de Chasles, on peut écrire $g_a(x) = I - \displaystyle\int_1^{x} \frac{e^{-t}}{t^{1-a}}\,\mathrm{d}t$.
Comme ξ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, le théorème fondamental de l'analyse permet d'affirmer que g_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa continuité en 0 résulte juste de la définition de l'intégrale généralisée $g_a(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \xi(t)\,\mathrm{d}t$ comme limite des "intégrales partielles" $g_a(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \xi(t)\,\mathrm{d}t$ lorsque la borne inférieure x tend vers 0.

Par le même argument, $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_1^x \xi(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \xi(t)\,\mathrm{d}t = I$, donc

$$g_a(x) = I - \int_1^x \xi(t)\,\mathrm{d}t \quad \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \quad I - I = 0\ .$$

16. On a vu que g_a était de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, le théorème fondamental donne aussi sa dérivée

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad g_a'(x) = -\xi(x) = -\frac{e^{-x}}{x^{1-a}}\ .$$

C. La formule des compléments.

17. Ce sont les fonctions $x \mapsto C\,e^x$, avec C réel.

18. On vérifie, pour $x > 0$, que $h_a'(x) = \Gamma(1-a)\,e^x\,\big(g_a'(x) + g_a(x)\big)$, puis

$$h_a'(x) - h_a(x) = \Gamma(1-a)\,e^x\,g_a'(x) = -\frac{\Gamma(1-a)}{x^{1-a}}$$

d'après **Q16.**, donc h_a est solution de **(E)** sur $\mathbb{R}_+^*$.

19. Les fonctions f_a et h_a sont toutes deux solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle **(E)**, la différence $h_a - f_a$ est donc solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation homogène **(E0)** associée à **(E)**. Il existe donc un réel C tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad h_a(x) - f_a(x) = C\,e^x\ .$$

On a donc aussi, en multipliant par e^{-x},

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \Gamma(1-a)\,g_a(x) - f_a(x)\,e^{-x} = C\ .$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} g_a(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = 0$ d'après **Q13.** et **Q15.**, on déduit $C = 0$.

On a donc $h_a = f_a$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

20. Les fonctions h_a et f_a sont continues en 0 d'après **Q10.** et **Q15.** et elles coïncident sur $\mathbb{R}_+^*$, elles coïncident donc aussi en 0 puisque $h_a(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} h_a(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f_a(x) = f_a(0)$, on a donc

$$\Gamma(1-a) \int_0^{+\infty} t^{a-1}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = K(a)\ ,$$

soit encore

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}\ .$$