CORRIGÉ du D.S. de MATHÉMATIQUES numéro 5a
PSI2 2025-2026

EXERCICE

d'aprés e3a, 2018, filière PC

1. On écrit $S_k(n) = n^{k+1} \times \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^k$, on reconnaît ainsi une somme de Riemann puisque

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^k \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad \int_0^1 t^k \,\mathrm{d}t = \frac{1}{k+1}\ .$$

On en déduit l'équivalent proposé.

2. On calcule $\mathrm{E}(X_1) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \times i = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$ puis, par la formule de transfert,

$$\mathrm{E}(X_1^2) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\times i^2 = \frac{1}{n}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

et enfin, par la formule de Koenig-Huygens, $\mathrm{V}(X_1) = \mathrm{E}(X_1^2) - \big(\mathrm{E}(X_1)\big)^2 = \dfrac{n^2-1}{12}$.

3. Pour tout $j \in [\![1,k]\!]$, on a $P(X_j \geq i) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \dfrac{n-i+1}{n}$. Ensuite, par indépendance des variables X_j avec $1 \leq j \leq k$,

$$P(U_k \geq i) = P\left(\bigcap_{j=1}^{k}\{X_j \geq i\}\right) = \prod_{j=1}^{k} P(X_j \geq i) = \left(\frac{n-i+1}{n}\right)^k .$$

4. Comme $\{U_k = i\} = \{U_k \geq i\} \setminus \{U_k \geq i+1\}$ (complémentaire), on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(U_k) &= \sum_{i=1}^{n} i\,P(U_k = i) \ = \ \sum_{i=1}^{n} i\,\big(P(U_k \geq i) - P(U_k \geq i+1)\big)\\
&= \sum_{i=1}^{n} i\,P(U_k \geq i) - \sum_{i=2}^{n+1}(i-1)\,P(U_k \geq i)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\big(i-(i-1)\big)\,P(U_k \geq i) \ = \ \sum_{i=1}^{n} P(U_k \geq i)\ .
\end{aligned}$$

Par un calcul analogue, avec la formule de transfert,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(U_k^2) &= \sum_{i=1}^{n} i^2\,P(U_k = i) \ = \ \sum_{i=1}^{n} i^2\,\big(P(U_k \geq i) - P(U_k \geq i+1)\big)\\
&= \sum_{i=1}^{n} i^2\,P(U_k \geq i) - \sum_{i=2}^{n+1}(i-1)^2\,P(U_k \geq i)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\big(i^2-(i-1)^2\big)\,P(U_k \geq i) \ = \ \sum_{i=1}^{n}(2i-1)\,P(U_k \geq i)\ .
\end{aligned}$$

5. Donc, par le changement d'indice $i' = n-i+1$,

$$\mathrm{E}(U_k) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n-i+1}{n}\right)^k = \frac{1}{n^k}\ \sum_{i'=1}^{n}(i')^k = \frac{S_k(n)}{n^k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{k+1}\ .$$

PROBLÈME

librement inspiré d'un sujet Centrale-Supélec, filière PC, 2015

PARTIE A. Fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support borné.

1.a. On a $\psi^{-1}(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$ donc $\text{supp}(\psi) = \mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$. Sur $\mathbb{R}_+$, la fonction ψ est continue, croissante avec $\psi(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = 1$.

b. La fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$. On montre par récurrence sur n que sa dérivée n-ième s'écrit sous la forme demandée:

- c'est vrai pour $n = 0$ avec $P_0 = 1$ (polynôme constant) ;

- si c'est vrai pour un n donné, de $\psi^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on déduit

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \psi^{(n+1)}(x) = -\frac{1}{x^2}\, P_n'\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}\, P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$$

en posant $P_{n+1} = X^2(P_n - P_n') \in \mathbb{R}[X]$, ce qui valide la récurrence.

c. Le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$ montre que

$$\lim_{x\to0^+} \psi^{(n)}(x) = \lim_{t\to+\infty} P_n(t)\, e^{-t} = 0$$

par croissances comparées des fonctions exponentielles et polynomiales.

d. On applique de façon répétée le théorème de la limite de la dérivée. La continuité de ψ sur $\mathbb{R}$ est immédiate puisque $\psi(0) = 0 = \lim\limits_{x\to0^-} \psi(x) = \lim\limits_{x\to0^+} e^{-\frac{1}{x}}$. Ensuite, ψ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{x\to0} \psi'(x) = 0$ donc ψ est dérivable en 0 avec $\psi'(0) = \lim\limits_{x\to0} \psi'(x) = 0$. Comme ψ' est par ailleurs continue sur $\mathbb{R}^*$, on déduit que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Pour un entier naturel n donné, supposons ψ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. La fonction $g = \psi^{(n)}$ est alors définie et continue sur $\mathbb{R}$, elle est dérivable avec une dérivée continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, et cette dérivée $g' = \psi^{(n+1)}$ admet pour limite 0 en 0, on déduit alors du théorème de la limite de la dérivée que g est dérivable en 0 avec $g'(0) = 0 = \lim\limits_{x\to0} g'(x)$ donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie que ψ est finalement de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.

On a ainsi prouvé par récurrence que ψ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ pour tout n, elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Pour x réel, posons $\varphi(x) = \psi(1-x^2) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } x \in\,]-1,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Alors φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$, et $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^*) =]-1,1[$ donc $\text{supp}(\varphi) = [-1,1]$. La fonction φ est par ailleurs à valeurs positives ou nulles.

3. L'ensemble $\mathcal{D}$ contient la fonction nulle et est clairement stable par combinaisons linéaires. Par ailleurs la question **2.** montre qu'il ne contient pas que la fonction nulle.

4.a. Comme φ est continue, positive, intégrable sur $\mathbb{R}$ (car à support borné) et non identiquement nulle, le théorème de stricte positivité indique que $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi > 0$.

b. La fonction ρ_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme composée. En posant $A = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^*)$, on sait que $\overline{A} = [-1, 1] = \mathrm{supp}(\varphi)$, puis

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \rho_n(x) \neq 0 \iff \varphi(nx) \neq 0 \iff nx \in A \iff x \in \frac{1}{n}\, A$$

en posant $kA = \{ka\ ;\ a \in A\}$ pour $k \in \mathbb{R}_+^*$. Donc

$$\mathrm{supp}(\rho_n) = \overline{\frac{1}{n}\, A} = \frac{1}{n}\, \overline{A} = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right].$$

En effet, on montre facilement, en utilisant la caractérisation séquentielle des points adhérents, que $\overline{kA} = k\, \overline{A}$. Enfin,

$$\int_{\mathbb{R}} \rho_n = \frac{n}{I} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(nx)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{I} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, \mathrm{d}t = 1$$

en posant le changement de variable $t = nx$.

c.i. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, considérons $h_n : (x, t) \mapsto f(t)\, \rho_n(x - t)$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

Notons tout d'abord que, comme $\rho_n(x-t)$ est nul si $|x-t| > \dfrac{1}{n}$, pour tout x réel, l'application partielle $t \mapsto h_n(x, t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et elle est intégrable sur $\mathbb{R}$ car elle est nulle en dehors du segment $\left[x - \dfrac{1}{n}, x + \dfrac{1}{n}\right]$.

Pour tout t réel, l'application partielle $x \mapsto h_n(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2 \qquad \frac{\partial^k h_n}{\partial x^k}(x, t) = f(t)\, \rho_n^{(k)}(x - t)\ .$$

Si $S = [a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$, alors pour $(x, t) \in S \times \mathbb{R}$, l'expression $h_n(x, t)$ est nulle si t n'appartient pas au segment $S' = \left[a - \dfrac{1}{n}, b + \dfrac{1}{n}\right]$, posons alors $M = \sup\limits_{t \in S'} \big|f(t)\big|$.

L'application $\rho_n^{(k)}$ est continue et nulle en dehors d'un segment, elle est donc bornée sur $\mathbb{R}$, posons $C_k = \|\rho_n^{(k)}\|_\infty$. On a alors la domination

$$\forall (x, t) \in S \times \mathbb{R} \qquad \left|\frac{\partial^k h_n}{\partial x^k}(x, t)\right| \leq M\, C_k\, \mathbb{1}_{S'}(t)\ ,$$

cette fonction majorante étant intégrable sur $\mathbb{R}$ car elle est continue par morceaux et à support borné.

Tout ceci permet d'appliquer l'extension aux fonctions $\mathcal{C}^\infty$ du théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre: la fonction g_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad g_n^{(k)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^k h_n}{\partial x^k}(x, t)\, \mathrm{d}t\ .$$

ii. Si f est K-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, alors en exploitant le fait que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x - t)\, \mathrm{d}t = 1$, on a, pour tout x réel,

$$
\begin{aligned}
\big|f(x)-g_n(x)\big| &= \left|f(x)-\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\rho_n(x-t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \big(f(x)-f(t)\big)\,\rho_n(x-t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq K\int_{-\infty}^{+\infty} |x-t|\,\rho_n(x-t)\,\mathrm{d}t = K\int_{-\infty}^{+\infty} |u|\,\varphi(nu)\,\frac{n}{I}\,\mathrm{d}u \\
&\leq \frac{K}{nI}\int_{-\infty}^{+\infty} |v|\,\varphi(v)\,\mathrm{d}v\ .
\end{aligned}
$$

avec les changements de variable $u = x - t$, puis $v = nu$. Le majorant ne dépend pas de x ("majoration uniforme") et tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, on a donc prouvé que $\|g_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui traduit la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction f.

La fonction $v \mapsto |v|\,\varphi(v)$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}$ car elle est continue et à support borné.

PARTIE B. Quelques calculs auxiliaires.

5. Soit $\varphi \in \mathcal{D}$, alors

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{1+n^2x^2}\,n\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi\left(\dfrac{t}{n}\right)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\ .
$$

Posons $f_n(t) = \dfrac{\varphi\left(\dfrac{t}{n}\right)}{1+t^2}$, alors (par la continuité de φ en 0) la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\varphi(0)}{1+t^2}$, toutes ces fonctions étant continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, et comme φ est bornée sur $\mathbb{R}$ on a la domination

$$
\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \big|f_n(t)\big| \leq \frac{\|\varphi\|_\infty}{1+t^2}\ ,
$$

cette fonction majorante étant intégrable sur $\mathbb{R}$. Du théorème de convergence dominée, on déduit alors que

$$
\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{\mathbb{R}} f = \pi\,\varphi(0)\ .
$$

6. Comme β_n est à support dans $[0,1]$, en posant ensuite $u = x^n$, on calcule

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} \beta_n(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 nx^n\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\varphi(x)\,nx^{n-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 u^{\frac{1}{n}}\,\varphi\Big(u^{\frac{1}{n}}\Big)\,\mathrm{d}u\ .
$$

Comme φ est continue au point 1, la suite de fonctions (g_n), avec $g_n(u) = u^{\frac{1}{n}}\,\varphi\Big(u^{\frac{1}{n}}\Big)$, converge simplement sur $]0,1]$ vers la fonction constante de valeur $\varphi(1)$, et on a la domination

$$
\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall u \in\,]0,1] \qquad \big|g_n(u)\big| \leq \|\varphi\|_\infty
$$

(fonction constante intégrable sur $]0,1]$). Encore par convergence dominée, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\beta_n(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 g_n(u)\,\mathrm{d}u=\int_0^1\varphi(1)\,\mathrm{d}u=\varphi(1)\ .$$

7. Pour faire apparaître la dérivée φ', intégrons par parties: si $\varphi\in\mathcal{D}$,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma_n(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} n^2\,\sin(nx)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \Big[-n\,\cos(nx)\,\varphi(x)\Big]_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}}+\int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} n\,\cos(nx)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x\\ &= n\,\varphi\Big(\frac{\pi}{n}\Big)-n\,\varphi\Big(-\frac{\pi}{n}\Big)+\int_{-\pi}^{\pi}\cos(t)\,\varphi'\Big(\frac{t}{n}\Big)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{\varphi\Big(\dfrac{\pi}{n}\Big)-\varphi(0)}{\dfrac{\pi}{n}}\times\pi+\frac{\varphi\Big(-\dfrac{\pi}{n}\Big)-\varphi(0)}{-\dfrac{\pi}{n}}\times\pi+J_n\ .\end{aligned}$$

On reconnaît deux taux d'accroissement qui tendent tous deux vers $\varphi'(0)$ lorsque $n\to+\infty$. Par convergence dominée, l'intégrale $J_n=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos(t)\,\varphi'\Big(\frac{t}{n}\Big)\,\mathrm{d}t$ tend, lorsque $n\to+\infty$, vers $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos(t)\,\varphi'(0)\,\mathrm{d}t=0$ car on a la domination $\left|\cos(t)\,\varphi'\Big(\dfrac{t}{n}\Big)\right|\le\|\varphi'\|_\infty$ (fonction constante intégrable sur $[-\pi,\pi]$).

Finalement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma_n(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x=2\pi\,\varphi'(0)$.

PARTIE C. Les distributions.

8. Par hypothèse, il existe un segment S contenant les supports de toutes les fonctions φ_n. Si $x\in\mathbb{R}\setminus S$, alors $\varphi_n(x)=0$ pour tout n, donc $\varphi(x)=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\varphi_n(x)=0$. La fonction φ est donc aussi à support dans S.

Par ailleurs, chaque fonction φ_n étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et la suite de fonctions $\big(\varphi_n^{(k)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ étant uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ pour tout entier k, il résulte du théorème de dérivation (extension aux fonctions $\mathcal{C}^\infty$) de la limite d'une suite de fonctions que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Donc $\varphi\in\mathcal{D}$.

9. D'abord $T_f(\varphi)$ existe bien pour tout $\varphi\in\mathcal{D}$ car la fonction $f\varphi$ est continue par morceaux et à support borné, donc intégrable sur $\mathbb{R}$. Ensuite, T_f est bien une forme linéaire sur $\mathcal{D}$ par linéarité de l'intégrale.

Ensuite, soit (φ_n) une suite de fonctions de $\mathcal{D}$ convergeant fortement vers $\varphi\in\mathcal{D}$, on a alors en particulier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\|\varphi_n-\varphi\|_\infty=0$. Si $S=[a,b]$ est un segment contenant les supports de toutes les fonctions φ_n, et donc aussi de la fonction φ, on a

$$\big|T_f(\varphi_n)-T_f(\varphi)\big| = \left|\int_a^b f(x)\,\big(\varphi_n(x)-\varphi(x)\big)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_a^b \big|f(x)\big|\,\big|\varphi_n(x)-\varphi(x)\big|\,\mathrm{d}x \\
&\leq \|\varphi_n-\varphi\|_\infty \int_S |f| \;,
\end{aligned}$$

et ce majorant tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} T_f(\varphi_n)=T_f(\varphi)$.

On a ainsi prouvé que T_f est une distribution.

10.a. La convergence forte d'une suite de fonctions (φ_n) de $\mathcal{D}$ vers φ entraîne évidemment sa convergence simple, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi_n(a)=\varphi(a)$, soit encore $\lim\limits_{n\to+\infty}\delta_a(\varphi_n)=\delta_a(\varphi)$. La linéarité de δ_a est par ailleurs immédiate, il s'agit donc d'une distribution.

b. Par l'absurde, supposons qu'il existe $f\in\mathcal{C}_m(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\delta_0=T_f$. En considérant des fonctions φ et φ_n telles que l'énoncé le suggère, posons $\alpha=\varphi(0)$, on a alors $\alpha>0$ et $\varphi_n(0)=\alpha$ pour tout n, puis

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\qquad \alpha=\varphi_n(0)=\delta_0(\varphi_n)=T_f(\varphi_n)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x)\,\varphi(nx)\,\mathrm{d}x\;,$$

cette dernière égalité car $\mathrm{supp}(\varphi_n)=\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]$. Mais la fonction f est bornée sur le segment $[-1,1]$ qui contient tous les segments $\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]$, posons $M=\|f\|_{\infty,[-1,1]}$, on a alors

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\qquad |\alpha|=\left|\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x)\,\varphi(nx)\,\mathrm{d}x\right|\leq\frac{2}{n}\,M\,\|\varphi\|_\infty\;,$$

ce qui est contradictoire puisque le majorant tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, alors que $|\alpha|$ est strictement positif et indépendant de n.

Cette contradiction montre que δ_0 n'est pas une distribution régulière.

11.a. Déjà cela a bien un sens puisque, si $\varphi\in\mathcal{D}$, alors φ est dérivable et $\varphi'\in\mathcal{D}$. Par linéarité de la dérivation et linéarité de T, on déduit que T' est bien une forme linéaire sur $\mathcal{D}$. Enfin, si (φ_n) est une suite de fonctions de $\mathcal{D}$ qui converge fortement vers $\varphi\in\mathcal{D}$, il est immédiat que la suite (φ_n') converge fortement vers φ' donc

$$T'(\varphi_n)=-T(\varphi_n')\quad\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\quad -T(\varphi')=T'(\varphi)\;,$$

donc T' est une distribution.

b. Pour tout $\varphi\in\mathcal{D}$, on a $(\delta_a)'(\varphi)=-\delta_a(\varphi')=-\varphi'(a)$.

c. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et si $\varphi\in\mathcal{D}$, alors par une intégration par parties,

$$\begin{aligned}
(T_f)'(\varphi) &= -T_f(\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\big[f(x)\,\varphi(x)\big]_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = T_{f'}(\varphi)
\end{aligned}$$

puisque le terme entre crochets est nul, φ étant à support borné. Donc $(T_f)'=T_{f'}$.

d. Si $\varphi \in \mathcal{D}$, on calcule

$$(T_H)'(\varphi) = -T_H(\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\mathrm{d}x = -\big[\varphi(x)\big]_0^{+\infty} = \varphi(0) = \delta_0(\varphi)\ .$$

Donc $(T_H)' = \delta_0$.

e. Soit $\varphi \in \mathcal{D}$. On calcule, en posant abusivement $\varphi(a_0) = \varphi(a_{n+1}) = 0$ puisque φ, de support borné, a des limites nulles en $-\infty$ et $+\infty$:

$$\begin{aligned}(T_f)'(\varphi) &= -T_f(\varphi') \ = \ -\sum_{i=0}^{n} c_i \int_{a_i}^{a_{i+1}} \varphi'(x)\,\mathrm{d}x \ = \ -\sum_{i=0}^{n} c_i\,\big(\varphi(a_{i+1}) - \varphi(a_i)\big) \\ &= -\sum_{i=1}^{n} c_{i-1}\,\varphi(a_i) + \sum_{i=1}^{n} c_i\,\varphi(a_i) \ = \ \sum_{i=1}^{n} (c_i - c_{i-1})\,\varphi(a_i)\ .\end{aligned}$$

Donc $(T_f)' = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (c_i - c_{i-1})\,\delta_{a_i}$.

PARTIE D. Convergence d'une suite de distributions.

12. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = T$ et si $\varphi \in \mathcal{D}$, alors $\varphi' \in \mathcal{D}$ et

$$T_n'(\varphi) = -T_n(\varphi') \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad -T(\varphi') = T'(\varphi)\ ,$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n' = T'$.

13. Le questions **5.**, **6.** et **7.** montrent respectivement que $\lim\limits_{n\to+\infty} T_{\alpha_n} = \pi\,\delta_0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} T_{\beta_n} = \delta_1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_{\gamma_n} = -2\pi\,(\delta_0)'$.

14.a. Soit $\varphi \in \mathcal{D}$. On a alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$T_{V_n}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} n\,V(nx)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} V(t)\,\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\mathrm{d}t\ .$$

La fonction φ est continue et à support borné donc elle est bornée sur $\mathbb{R}$, on a donc la domination

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \left|V(t)\,\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right| \leq \|\varphi\|_\infty\,V(t)\ ,$$

cette fonction majorante étant intégrable sur $\mathbb{R}$, et on a la convergence simple

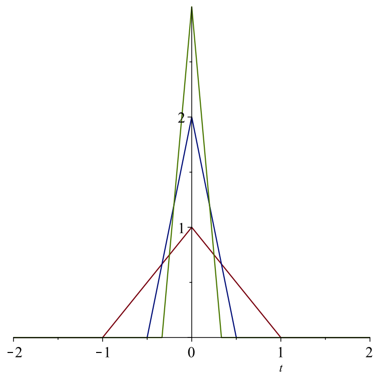
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \lim_{n\to+\infty} V(t)\,\varphi\left(\frac{t}{n}\right) = V(t)\,\varphi(0)\ .$$

Le théorème de convergence dominée s'applique donc et donne

$$\lim_{n\to+\infty} T_{V_n}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(t)\,\varphi(0)\,\mathrm{d}t = \varphi(0) = \delta_0(\varphi)\ ,$$

on a ainsi prouvé que $\lim\limits_{n\to+\infty} T_{V_n} = \delta_0$.

b. La fonction V est nulle en dehors de $[-1,1]$, on a $V(t)=1+t$ sur $[-1,0]$ et $V(t)=1-t$ sur $[0,1]$. Lorsque n augmente, le graphe de V_n fait un pic de plus en plus haut et de plus en plus étroit. L'aire sous la courbe est constante de valeur 1, mais cette aire "se concentre"



au voisinage de l'origine lorsque n augmente.

15. Soit $\varphi \in \mathcal{D}$, montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} T_{U_n}(\varphi) = \delta_0(\varphi) = \varphi(0)$. Majorons la valeur absolue de la différence. Posons $M = \|\varphi\|_\infty$, la fonction φ étant bornée sur $\mathbb{R}$. Comme $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} U_n = 1$, pour tout $\alpha > 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\big|T_{U_n}(\varphi) - \varphi(0)\big| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} U_n(t)\,\big(\varphi(t)-\varphi(0)\big)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{-\alpha} U_n(t)\,\big|\varphi(t)-\varphi(0)\big|\,\mathrm{d}t + \int_{-\alpha}^{\alpha} U_n(t)\,\big|\varphi(t)-\varphi(0)\big|\,\mathrm{d}t + \int_{\alpha}^{+\infty} U_n(t)\,\big|\varphi(t)-\varphi(0)\big|\,\mathrm{d}t \\
&\leq 2M\left(\int_{-\infty}^{-\alpha} U_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\alpha}^{+\infty} U_n(t)\,\mathrm{d}t\right) + \sup_{t\in[-\alpha,\alpha]} \big|\varphi(t)-\varphi(0)\big|\,.
\end{aligned}$$

Donnons-nous $\varepsilon > 0$. De la continuité de φ en 0, on déduit qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\sup\limits_{t\in[-\alpha,\alpha]} \big|\varphi(t)-\varphi(0)\big| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Cet α étant fixé, par la propriété **(2)**, il existe N entier tel que

$$n \geq N \Longrightarrow \int_{-\infty}^{-\alpha} U_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\alpha}^{+\infty} U_n(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{\varepsilon}{4M}\,.$$

Pour $n \geq N$, on a alors

$$\big|T_{U_n}(\varphi) - \varphi(0)\big| \leq 2M\,\frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

On a ainsi prouvé que $\lim\limits_{n\to+\infty} \big|T_{U_n}(\varphi) - \varphi(0)\big| = 0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} T_{U_n}(\varphi) = \varphi(0)$.

Et ceci pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} T_{U_n} = \delta_0$.