DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES numéro 5a

PSI2 2025-2026 **Durée: 4 heures** **17/01/2026**

EXERCICE

1. Pour k et n entiers naturels non nuls, on pose $S_k(n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^k$. En considérant par exemple une somme de Riemann, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, on a $S_k(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^{k+1}}{k+1}$.

On rappelle que $S_1(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ *et* $S_2(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

On considère maintenant une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n, et on effectue k tirages avec remise dans cette urne. Pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, on note X_j le numéro obtenu lors du j-ième tirage. On suppose que la loi de chaque X_j est uniforme sur $[\![1, n]\!]$, et que les variables $X_1, \cdots, X_k$ sont indépendantes. On définit enfin une variable aléatoire U_k par

$$U_k = \min(X_1, \cdots, X_k) \ .$$

2. Exprimer $\mathrm{E}(X_1)$, $\mathrm{E}(X_1^2)$, puis $\mathrm{V}(X_1)$ en fonction de n.

3. Montrer que $P(U_k \geq i) = \left(\dfrac{n-i+1}{n}\right)^k$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

4. Prouver les relations

$$\mathrm{E}(U_k) = \sum_{i=1}^{n} P(U_k \geq i) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{E}(U_k^2) = \sum_{i=1}^{n} (2i-1)\, P(U_k \geq i) \ .$$

5. Exprimer $\mathrm{E}(U_k)$ en fonction de n à l'aide de l'expression $S_k(n)$ introduite dans la question **1.**, puis donner un équivalent de $\mathrm{E}(U_k)$ lorsque n tend vers l'infini, l'entier k étant fixé.

PROBLÈME

On note $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on appelle **support** de f, et on note $\operatorname{supp}(f)$ l'adhérence dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble des réels x vérifiant $f(x) \neq 0$, i.e. $\operatorname{supp}(f) = \overline{A}$ avec $A = f^{-1}(\mathbb{R}^*) = \big\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\big\}$.

On note $\mathcal{C}_m(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

On rappelle que toute fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.

On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ dont le support est borné.

A. Fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support borné.

1. Soit la fonction $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} .$$

a. Déterminer le support de ψ et donner l'allure de sa courbe représentative.

b. Montrer que ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout n entier naturel, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \psi^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} .$$

c. En déduire que, pour tout n entier naturel, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} \psi^{(n)}(x) = 0$.

d. Montrer que la fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. En utilisant la fonction ψ ci-dessus, construire (simplement!) une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ positive, de classe $\mathcal{C}^\infty$, ayant pour support exactement le segment $[-1, 1]$.

3. Montrer que l'ensemble $\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ non réduit à $\{0\}$, et que $\mathcal{D}$ est stable par la dérivation des fonctions.

4. Dans toute cette question **4.**, on note φ une fonction appartenant à $\mathcal{D}$, positive, et ayant pour support $[-1, 1]$.

a. Montrer que $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi$ est un réel strictement positif.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\rho_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R} \quad \rho_n(x) = \dfrac{n}{I}\, \varphi(nx)$.

Montrer que $\rho_n \in \mathcal{D}$, préciser son support et calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \rho_n$.

c. Soit $f \in \mathcal{C}_m(\mathbb{R},\mathbb{R})$, soit $n \in \mathbb{N}^*$.

i*. Montrer que la fonction $g_n : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \rho_n(x-t)\, \mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

ii. Dans cette question, on suppose que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Montrer que la suite de fonctions (g_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f.

B. Quelques calculs auxiliaires.

Pour tout n entier naturel non nul, on considère les fonctions suivantes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ (on admettra qu'elles sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}$):

$$\alpha_n : x \mapsto \frac{n}{1+n^2x^2} \quad ; \quad \beta_n : x \mapsto \begin{cases} nx^n & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad ; \quad \gamma_n : x \mapsto \begin{cases} n^2 \sin(nx) & \text{si } x \in \left[-\dfrac{\pi}{n}, \dfrac{\pi}{n}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad .$$

5. Soit $\varphi \in \mathcal{D}$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$. *On pourra poser $t = nx$ dans l'intégrale.*

6. Soit $\varphi \in \mathcal{D}$. À l'aide d'un changement de variable, calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta_n(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$.

7. Montrer qu'il existe un réel C que l'on déterminera tel que, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$, on ait

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_n(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = C\,\varphi'(0)\ .$$

C. Les distributions.

On dira qu'une suite (φ_n) de fonctions de $\mathcal{D}$ **converge fortement** s'il existe un segment S de $\mathbb{R}$ tel que, pour tout n entier naturel on ait $\mathrm{supp}(\varphi_n) \subset S$ et si, pour tout k entier naturel, la suite de fonctions $\left(\varphi_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

8. Soit (φ_n) une suite de fonctions de $\mathcal{D}$ qui converge fortement. On pose $\varphi(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x)$ pour tout x réel. Montrer que $\varphi \in \mathcal{D}$.

On appelle **distribution** toute forme linéaire T sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{D}$ telle que, pour toute suite (φ_n) de fonctions de $\mathcal{D}$ convergeant fortement, on ait $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T(\varphi_n) = T(\varphi)$ dans $\mathbb{R}$, en posant $\varphi(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x)$ pour tout x réel.

On admettra que l'ensemble des distributions est muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

9. Soit $f \in \mathcal{C}_m(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$, on pose

$$T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Montrer que l'application $T_f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est une distribution.

Une distribution T telle qu'il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux pour laquelle $T = T_f$ est appelée **distribution régulière**.

10. Soit a un nombre réel, soit l'application $\delta_a : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \delta_a(\varphi) = \varphi(a)$.

a. Montrer que δ_a est une distribution, on l'appellera **distribution de Dirac** au point a.

b. Soit $\varphi \in \mathcal{D}$, positive, telle que $\mathrm{supp}(\varphi) = [-1,1]$. En considérant la suite de fonctions (φ_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \varphi_n(x) = \varphi(nx)\ ,$$

montrer que δ_0 n'est pas une distribution régulière.

11. Dérivée d'une distribution.

Si T est une distribution, on définit sa **dérivée** T' par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \qquad T'(\varphi) = -T(\varphi') \ .$$

a. Justifier que T' est une distribution.

b. Soit a réel, soit $\varphi \in \mathcal{D}$. Expliciter $(\delta_a)'(\varphi)$.

c. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $(T_f)' = T_{f'}$.

d. On définit la **fonction de Heaviside** $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R} \quad H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
Reconnaître la distribution $(T_H)'$.

e. Soient $a_1, \cdots, a_n$ des réels tels que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Par commodité, on posera $a_0 = -\infty$ et $a_{n+1} = +\infty$. Soient $c_0, c_1, \cdots, c_n$ des réels. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction "en escalier" (donc continue par morceaux) telle que $\forall i \in [\![0, n]\!]\ \forall x \in]a_i, a_{i+1}[\quad f(x) = c_i$.
Exprimer la dérivée de la distribution régulière T_f comme une combinaison linéaire de distributions de Dirac.

D. Convergence d'une suite de distributions.

On dit qu'une suite de distributions $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une distribution T si on a

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \qquad \lim_{n \to +\infty} T_n(\varphi) = T(\varphi) \ .$$

On note alors $T = \lim\limits_{n \to +\infty} T_n$.

12. Montrer que, si une suite de distributions $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une distribution T, alors la suite des dérivées (T'_n) converge vers la distribution T'.

13. En reprenant les notations de la partie **B.**, montrer que les suites de distributions régulières (T_{α_n}), (T_{β_n}) et (T_{γ_n}) convergent respectivement vers des distributions A, B et C que l'on exprimera à l'aide de distributions de Dirac δ_a, avec a réel, ou de leurs dérivées $(\delta_a)'$.

14. Soit une fonction $V \in \mathcal{C}_m(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, positive, intégrable sur $\mathbb{R}$, et telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} V = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $V_n : x \mapsto n\, V(nx)$.

a. Montrer que la suite de distributions régulières (T_{V_n}) converge vers la distribution de Dirac δ_0.

b. Représenter graphiquement la fonction V_n lorsque V est la fonction $t \mapsto \big(1 - |t|\big)\, \mathbb{1}_S(t)$, avec $S = [-1, 1]$. *La fonction "indicatrice" $\mathbb{1}_S$ vaut 1 sur S et vaut 0 en dehors de S.*

15*. Plus généralement, soit (U_n) une suite de fonctions continues par morceaux, positives et intégrables sur $\mathbb{R}$, telles que

(1): $\forall n \in \mathbb{N} \qquad \displaystyle\int_{\mathbb{R}} U_n = 1$;

(2): $\forall \alpha > 0 \qquad \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\int_{-\infty}^{-\alpha} U_n(t)\, \mathrm{d}t + \int_{\alpha}^{+\infty} U_n(t)\, \mathrm{d}t \right) = 0.$

Montrer que la suite de distributions régulières (T_{U_n}) converge vers la distribution de Dirac δ_0.