PROBLÈME 1

On considère l'application φ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même, définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X] \qquad \varphi(P) = (X^2-1)\,P'' + 2X\,P' \ .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère le polynôme $U_n = (X^2-1)^n$, et on pose $L_n = \dfrac{1}{2^n\,n!}\,U_n^{(n)}$, où $U_n^{(n)}$ représente le polynôme dérivé n-ième du polynôme U_n. On notera a_n le coefficient dominant du polynôme L_n.

PARTIE A.

1. Déterminer L_0 et L_1. Vérifier que $L_2 = \dfrac{1}{2}\,(3X^2-1)$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré du polynôme L_n et son coefficient dominant a_n.

3. Montrer que la famille $(L_0, \cdots, L_n)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Prouver que φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ.

Pour tout n entier naturel, on note φ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par φ, et on note $M_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice de φ_n relativement à la base canonique $\mathcal{B}_n = (1, X, \cdots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

6. Construire la matrice M_n.

7. Montrer que l'endomorphisme φ_n est diagonalisable.

8. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, vérifier la relation

$$(X^2-1)\,U_k' - 2k\,X\,U_k = 0 \ .$$

9. En dérivant $k+1$ fois la relation ci-dessus, prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in [\![0,n]\!] \qquad (X^2-1)\,U_k^{(k+2)} + 2X\,U_k^{(k+1)} - k(k+1)\,U_k^{(k)} = 0 \ .$$

10. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, montrer que le polynôme L_k est vecteur propre de l'endomorphisme φ_n.

11. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, préciser les éléments propres de l'endomorphisme φ_n de $\mathbb{R}_n[X]$.

12. Préciser les éléments propres de l'endomorphisme φ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

PARTIE B.

On note $E = \mathcal{C}\big([-1,1], \mathbb{R}\big)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[-1,1]$ vers $\mathbb{R}$. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme, on identifiera P avec la fonction polynomiale associée sur $[-1,1]$, et on pourra ainsi considérer P comme un élément de E.

Pour $f \in E$ et $g \in E$, on pose $(f|g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$, on rappelle que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E, et on notera $\|\cdot\|_2$ la norme associée.

Pour $f \in E$, on posera $\|f\|_\infty = \max\limits_{x\in[-1,1]} \big|f(x)\big|$.

13. Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes. En intégrant par parties, montrer que

$$\big(\varphi(P)|Q\big) = \big(P|\varphi(Q)\big) \ .$$

14. En déduire que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale dans l'espace préhilbertien E.

Pour tout n entier naturel, on pose $Q_n = \dfrac{L_n}{\|L_n\|_2}$.

Pour $f \in E$ et $k \in \mathbb{N}$, on pose $c_k(f) = (Q_k|f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} Q_k(t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$.

Si $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $d_2\big(f, \mathbb{R}_n[X]\big) = \inf_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - Q\|_2$ la distance de f au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$, pour la norme $\|\cdot\|_2$.

15. Montrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $d_2\big(f, \mathbb{R}_n[X]\big) = \|f - T_n\|_2$. Interpréter géométriquement ce résultat.

16. Justifier l'égalité, pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$d_2\big(f, \mathbb{R}_n[X]\big)^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k(f)^2 \ .$$

17. En déduire la convergence de la série $\sum_{k \geq 0} c_k(f)^2$ et l'inégalité $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(f)^2 \leq \|f\|_2^2$.

On admet maintenant le **théorème de Weierstrass:** *toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.*

18. Soit $f \in E$, soit ε un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que $d_2\big(f, \mathbb{R}_N[X]\big) \leq \varepsilon$.

19. En déduire la "relation de Parseval":

$$\forall f \in E \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(f)^2 = \|f\|_2^2 \ .$$

20. À l'aide d'une identité de polarisation, montrer que

$$\forall (f,g) \in E^2 \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(f)\, c_k(g) = (f|g) \ .$$

PROBLÈME 2

1.a. Montrer la convergence de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t$.

b. En utilisant une intégration par parties, en déduire la convergence de l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t$, et prouver l'égalité $J = K$.

2. Montrer que les fonctions $\varphi : t \mapsto \dfrac{1 - \cos(t)}{t}$ et $\psi : t \mapsto \dfrac{1 - \cos(t)}{t^2}$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Pour tout réel positif x, on pose $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2}\, e^{-xt}\, \mathrm{d}t$.

a. Montrer que la fonction g est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

b. Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et exprimer $g'(x)$ et $g''(x)$, pour $x > 0$, sous forme d'intégrales.

c. Donner une expression explicite de $g''(x)$ pour $x > 0$.

d. En utilisant par exemple la question **2.**, déterminer $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g'(x)$.

e. En déduire une expression explicite de $g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

f. En utilisant une intégration par parties, expliciter une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x^2+1)$.

g. Expliciter $g(x)$ pour $x > 0$.

h. En déduire que $J = K = \dfrac{\pi}{2}$.

4. Pour α réel tel que $0 < \alpha < 2$, on pose $J_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ et $K_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer la convergence de l'intégrale J_α.

b. En déduire la convergence de l'intégrale K_α et donner une relation simple entre J_α et K_α.

5. Pour n entier naturel avec $n \geq 2$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^n)\,\mathrm{d}t$.

a. À l'aide d'un changement de variable, montrer que l'intégrale I_n converge, et trouver une relation simple entre I_n et une intégrale J_α pour une certaine valeur de α que l'on précisera en fonction de n.

b. Montrer la continuité de l'application $\alpha \mapsto J_\alpha$ sur l'intervalle $]0, 2\,[$.

c. En déduire un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.