COLLES de MATHÉMATIQUES **PSI2 2025-2026**

Semaine 15 : du 26/01 au 30/01

Calcul intégral (révisions)

Théorème de convergence dominée.

Théorème de convergence dominée à paramètre continu.

Théorèmes de continuité et de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre. Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Adaptation des théorèmes au cas où la condition de domination est vérifiée sur tout segment.

Théorème d'intégration terme à terme.

Espaces préhilbertiens et euclidiens

Le programme de la semaine dernière, plus:

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Toute forme linéaire sur un espace euclidien est de la forme $x \mapsto (a|x)$. Vecteur normal à un hyperplan. Distance d'un vecteur à un hyperplan, à une droite. Expression de l'image d'un vecteur par une réflexion.

Isométries vectorielles (ou automorphismes orthogonaux) d'un espace euclidien. Caractérisations: conservation du produit scalaire, image d'une base orthonormale. Groupe orthogonal $\mathrm{O}(E)$.

Matrices orthogonales. Définition par $A^\top A = I_n$. Caractérisations utilisant les lignes ou les colonnes. Utilisations comme matrices de passage entre deux bases orthonormales d'un espace euclidien, comme matrices représentant une isométrie vectorielle dans un espace euclidien rapporté à une base orthonormale. Groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{O}(n)$, groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{SO}(n)$.

Démonstrations de cours ou proches du cours

- Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité. Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.
- Montrer qu'une famille orthogonale finie de vecteurs non nuls est libre.
- Existence de bases orthonormales dans un espace euclidien (*avec ou sans procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt*).
- Calculs dans une base orthonormale (coordonnées d'un vecteur, coefficients de la matrice d'un endomorphisme).
- Montrer que, si V est de dimension finie dans E préhilbertien, alors $V \oplus V^\perp = E$ et $(V^\perp)^\perp = V$. Expression du projeté orthogonal d'un vecteur x de E sur V. Distance de x à V.
- Problème de la régression linéaire (droite des moindres carrés), interprétation en termes de projection orthogonale sur un s.e.v.
- Dans E euclidien, expression de la réflexion d'hyperplan $H = \big(\mathrm{Vect}(a)\big)^\perp$, expression de la distance d'un vecteur x à cet hyperplan.