EXERCICES sur les ESPACES PRÉHILBERTIENS et EUCLIDIENS
PSI2 2025-2026

Produit scalaire, norme associée, orthogonalité

1. Soit E un espace préhilbertien réel. Soient f et g deux applications de E vers E telles que

$$\forall (x,y)\in E^2 \qquad \big(x|f(y)\big)=\big(g(x)|y\big)\ .$$

Montrer que f et g sont des endomorphismes de E.

- -

Soient x_1, x_2, y des vecteurs de E, soient a et b des réels ; alors

$$\begin{aligned}\big(g(ax_1+bx_2)|y\big) &= \big(ax_1+bx_2|f(y)\big)=a\,\big(x_1|f(y)\big)+b\,\big(x_2|f(y)\big)\\ &= a\,\big(g(x_1)|y\big)+b\,\big(g(x_2)|y\big)\\ &= \big(a\,g(x_1)+b\,g(x_2)|y\big)\ .\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout vecteur y de E, on déduit $g(ax_1+bx_2)=a\,g(x_1)+b\,g(x_2)$, donc g est linéaire. On procède de même pour montrer la linéarité de f.

---

2. Soit $E=\mathcal{C}^1\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Pour $f\in E$ et $g\in E$, on pose

$$<f,g>=\int_0^1 f'(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t+f(1)\,g(0)+f(0)\,g(1)\ .$$

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

- -

La bilinéarité et la symétrie sont évidentes. Pour le caractère défini positif, il faut penser à Mrs. Cauchy & Schwarz, qui nous disent notamment que $\left(\displaystyle\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2\le\displaystyle\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t$. Ainsi,

$$\begin{aligned}<f,f> &= \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t+2\,f(0)\,f(1)\\ &\ge \left(\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2+2\,f(0)\,f(1)\ =\ \big(f(1)-f(0)\big)^2+2\,f(0)\,f(1)\\ &= f(0)^2+f(1)^2\ \ge\ 0\ .\end{aligned}$$

La forme est donc positive et, si $<f,f>=0$, alors $f(0)^2+f(1)^2=0$, donc $f(0)=f(1)=0$, mais on a aussi dans ce cas $\displaystyle\int_0^1 f'(t)^2\mathrm{d}t=0$, d'où $f'=0$ par le théorème de stricte positivité, puis $f=0$ d'où le caractère défini.

---

3. Soient a et b deux vecteurs unitaires dans un espace préhilbertien réel E. Pour tout vecteur x non nul de E, on pose $\varphi(x)=\dfrac{(x|a)(x|b)}{\|x\|^2}$. Exprimer $\varphi(x)$ à l'aide des vecteurs $u=a+b$ et $v=a-b$. Déterminer les réels

$$m=\min_{x\in E\setminus\{0\}}\varphi(x)\qquad\text{et}\qquad M=\max_{x\in E\setminus\{0\}}\varphi(x)\ .$$

- -

Notons que $(u|v)=\|a\|^2-\|b\|^2=0$: les vecteurs u et v sont orthogonaux. Avec $a=\dfrac{u+v}{2}$ et $b=\dfrac{u-v}{2}$, on obtient

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\} \qquad \varphi(x) = \frac{1}{4}\,\frac{(x|u+v)\,(x|u-v)}{\|x\|^2} = \frac{1}{4}\,\frac{(x|u)^2 - (x|v)^2}{\|x\|^2}\ .$$

Donc $\varphi(x) \leq \dfrac{(x|u)^2}{4\,\|x\|^2} \leq \dfrac{1}{4}\,\|u\|^2$ (cette dernière inégalité par Cauchy-Schwarz). Comme u et v sont orthogonaux, on a $\varphi(u) = \dfrac{(u|u)^2}{4\,\|u\|^2} = \dfrac{\|u\|^2}{4}$, donc

$$M = \max_{x \in E\setminus\{0\}} \varphi(x) = \frac{\|u\|^2}{4} = \frac{1}{4}\,\big(\|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\,(a|b)\big) = \frac{1+(a|b)}{2}\ .$$

De même, $\varphi(x) \geq -\dfrac{(x|v)^2}{4\,\|x\|^2} \geq -\dfrac{\|v\|^2}{4}$, et $\varphi(v) = -\dfrac{\|v\|^2}{4}$, donc

$$m = \min_{x \in E\setminus\{0\}} \varphi(x) = -\frac{\|v\|^2}{4} = -\frac{1}{4}\,\big(\|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\,(a|b)\big) = \frac{(a|b)-1}{2}\ .$$

---

4. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Comparer les rangs des matrices A et $A^\top A$. *On pourra s'intéresser aux noyaux des applications linéaires canoniquement associées à ces matrices.*

- -

Les matrices A et $A^\top A$ ont le même noyau. En effet, A représente canoniquement une application linéaire de $\mathbb{R}^q$ vers $\mathbb{R}^p$, alors que $A^\top A$ représente un endomorphisme de $\mathbb{R}^q$. Et, si $X \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^q$ appartient au noyau de A, alors $AX = 0$ donc $A^\top AX = 0$, ainsi $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(A^\top A)$. Réciproquement, si $X \in \mathrm{Ker}(A^\top A)$, alors $A^\top AX = 0$, puis $X^\top A^\top AX = 0$, soit $(AX)^\top(AX) = 0$, ou encore $\|AX\|^2 = 0$, le symbole $\|\cdot\|$ représentant la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^p$, donc $AX = 0$ et $X \in \mathrm{Ker}(A)$.

On a ainsi prouvé que $\mathrm{Ker}(A^\top A) = \mathrm{Ker}(A)$.

Enfin, les applications linéaires canoniquement associées aux matrices A et $A^\top A$ ayant toutes deux pour espace de départ $\mathbb{R}^q$, le théorème du rang donne

$$\mathrm{rg}(A^\top A) = q - \dim\big(\mathrm{Ker}(A^\top A)\big) = q - \dim\big(\mathrm{Ker}(A)\big) = \mathrm{rg}(A)\ .$$

---

5. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel constitué des suites réelles bornées. Si u et v sont deux suites appartenant à E, on pose $(u|v) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n v_n}{2^n}$.

a. Montrer que l'on définit bien ainsi un produit scalaire sur E.

b. On note F le sous-espace vectoriel de E constitué des suites "presque nulles", c'est-à-dire dont les termes sont nuls à partir d'un certain rang. Déterminer l'orthogonal de F. Le sous-espace F admet-il un supplémentaire orthogonal ? Déterminer $(F^\perp)^\perp$.

c. Montrer que F est dense dans E.

- -

a. D'abord, pour $(u,v) \in E^2$, la série de terme général $\dfrac{u_n v_n}{2^n}$ converge : en effet, les suites u et v sont bornées, donc $|u_n| \leq M$ et $|v_n| \leq M'$ pour tout n, puis $\left|\dfrac{u_n v_n}{2^n}\right| \leq \dfrac{MM'}{2^n}$, d'où la convergence absolue de la série définissant $(u|v)$. Les vérifications des caractères bilinéaire, symétrique et défini positif, sont laissées à l'éventuel (et bienvenu) lecteur.

b. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons $e^{(k)} = (e_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $e_n^{(k)} = \delta_{k,n}$, autrement dit la suite dont le terme d'indice k vaut 1, et les autres valent 0. On a bien $e^{(k)} \in F$ pour tout k. *En fait, on a plus précisément* $F = \mathrm{Vect}\left\{e^{(k)}\ ;\ k \in \mathbb{N}\right\}$. Si $u \in F^\perp$, alors, pour tout entier naturel k, on a $(u|e^{(k)}) = \dfrac{u_k}{2^k} = 0$, donc $u = 0$. On a ainsi prouvé que $F^\perp = \{0\}$. Comme $F \neq E$, on a $F \oplus F^\perp = F \oplus \{0\} = F \neq E$, donc l'orthogonal $F^\perp$ de F n'est pas un supplémentaire de F.
Enfin, $(F^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = E$, et en particulier $(F^\perp)^\perp \neq F$.

c. Soit $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E$. Il existe donc $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|u_k| \leq M$ pour tout k. Pour tout n entier naturel, notons $s^{(n)}$ la suite u tronquée à l'ordre n, soit encore

$$s^{(n)} = (u_0, u_1, \cdots, u_n, 0, 0, \cdots) = \sum_{k=0}^{n} u_k e^{(k)} .$$

On a alors $s^{(n)} \in F$ pour tout n, et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} s^{(n)} = u$ dans l'espace vectoriel normé $\big(E, \|\cdot\|\big)$, si $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ de E. En effet, pour tout n, on a $u - s^{(n)} = r^{(n)} = (0, 0, \cdots, 0, u_{n+1}, u_{n+2}, \cdots)$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \|r^{(n)}\|^2 = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{u_k^2}{2^k} \leq M^2 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{M^2}{2^n} ,$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u - s^{(n)}\| = \lim\limits_{n\to+\infty} \|r^{(n)}\| = 0$, ce qu'il fallait démontrer. Le sous-espace vectoriel F est donc dense dans E.

6*. Soit E un espace préhilbertien réel, soient $x_1, \cdots, x_n$ des vecteurs de E. On suppose qu'il existe un réel positif M tel que

$$\forall (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n \qquad \left\| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k \right\| \leq M .$$

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 \leq M^2$.

- -

On va faire une récurrence sur n. On va prouver pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}_n$:
≪Pour tout réel positif M, pour tout n-uplet $(x_1, \cdots, x_n)$ de vecteurs de E tels que $\forall (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n \quad \left\| \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k \right\| \leq M$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 \leq M^2$. ≫

- Pour $n = 1$, l'assertion $\mathcal{P}_1$ est évidente!
- Pour $n = 2$, elle résulte de l'identité du parallélogramme

$$\|x_1+x_2\|^2+\|x_1-x_2\|^2=2\big(\|x_1\|^2+\|x_2\|^2\big)\ .$$

• Soit $n\geq 3$, supposons $\mathcal{P}_{n-1}$ vraie, soit alors $M\geq 0$, soient $x_1,\cdots,x_n$ des vecteurs de E tels que $\forall(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n\quad\Big\|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k x_k\Big\|\leq M$. Fixons $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1})\in\{-1,1\}^{n-1}$ et posons $y_1=\sum_{k=1}^{n-1}\varepsilon_k x_k$ et $y_2=x_n$, on a alors $\forall(\alpha_1,\alpha_2)\in\{-1,1\}^2\quad\big\|\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2\big\|\leq M$; la propriété $\mathcal{P}_2$ étant vraie, on en déduit que $\|\alpha_1\|^2+\|\alpha_2\|^2\leq M^2$. On a donc prouvé que $\forall(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1})\in\{-1,1\}^{n-1}\quad\Big\|\sum_{k=1}^{n-1}\varepsilon_k x_k\Big\|\leq\sqrt{M^2-\|x_n\|^2}$ et, la propriété $(\mathcal{P}_{n-1})$ étant supposée vraie, on en déduit que $\sum_{k=1}^{n-1}\|x_k\|^2\leq M^2-\|x_n\|^2$, ce qui achève la récurrence.

Familles orthogonales ou orthonormales

7. Soit $E=\mathbb{R}[X]$. Pour $(P,Q)\in E^2$, on pose $(P|Q)=\displaystyle\int_0^{+\infty}P(t)\,Q(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que l'on définit bien ainsi un produit scalaire sur l'espace vectoriel E.

b. Calculer $(X^p|X^q)$ pour p et q entiers naturels.

c. Orthonormaliser la famille $(1,X,X^2)$ pour ce produit scalaire.

- -

a. Tout d'abord, l'intégrale ci-dessus converge: en effet, si le polynôme PQ est non nul, soit $a_d X^d$ son terme dominant avec $d\in\mathbb{N}$ et $a_d\in\mathbb{R}^*$, on a alors

$$t^2\,P(t)\,Q(t)\,e^{-t}\underset{t\to+\infty}{\sim}a_d\,t^{d+2}\,e^{-t}\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

par croissances comparées, donc $P(t)\,Q(t)\,e^{-t}=o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ lorsque $t\to+\infty$, ce qui garantit l'intégrabilité de cette fonction continue sur $[0,+\infty[$.

Ensuite, on a bien un produit scalaire: La bilinéarité et la symétrie sont évidentes, et on a $(P|P)=\displaystyle\int_0^{+\infty}P(t)^2\,e^{-t}\,\mathrm{d}t\geq 0$. Comme la fonction $t\mapsto P(t)^2\,e^{-t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, on déduit du théorème de stricte positivité que $(P|P)$ est nul si et seulement si $\forall t\in\mathbb{R}_+\quad P(t)^2\,e^{-t}=0$, ce qui entraîne que $\forall t\in\mathbb{R}_+\quad P(t)=0$, ce qui entraîne enfin que le polynôme P admet une infinité de racines, donc est le polynôme nul. On a obtenu le caractère défini positif.

b. Posons $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}t^n\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour tout n entier naturel. Un calcul classique, par une intégration par parties, donne $I_0=1$ puis $I_n=nI_{n-1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, donc $I_n=n!$ pour tout n entier naturel.

Ensuite, pour tout $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, $(X^p|X^q)=I_{p+q}=(p+q)!$

c. Notons $\mathcal{E} = (E_0, E_1, E_2)$ l'orthonormalisée de la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

• D'abord, $\|1\|^2 = (1|1) = I_0 = 1$, le polynôme constant est donc unitaire (dans le sens "de norme 1"). On pose donc $E_0 = 1$.

• Ensuite, $(E_0|X) = (1|X) = 1$, donc $V_1 = X - (E_0|X)\,E_0 = X - 1$, qu'il reste à "normer". On calcule

$$\|X-1\|^2 = (X-1|X-1) = (X|X) - 2\cdot(1|X) + (1|1) = 2 - 2 + 1 = 1\ ,$$

donc $E_1 = \dfrac{V_1}{\|V_1\|} = V_1 = X - 1$.

• Enfin, $(E_0|X^2) = (1|X^2) = 2$ et $(E_1|X^2) = (X|X^2) - (1|X^2) = 6 - 2 = 4$, donc

$$V_2 = X^2 - (E_0|X^2)\,E_0 - (E_1|X^2)\,E_1 = X^2 - 2 - 4(X-1) = X^2 - 4X + 2\ ,$$

puis $\|V_2\|^2 = 4$ (*y'a un petit calcul*), donc $E_2 = \dfrac{V_2}{\|V_2\|} = \dfrac{V_2}{2} = \dfrac{1}{2}(X^2 - 4X + 2)$.

---

8. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires d'un espace préhilbertien réel E, telle que $\forall x \in E \quad \|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2$. Montrer que cette famille est orthogonale, puis que c'est une base orthonormale de E.

- -

Fixons un indice $j \in [\![1, n]\!]$, on a alors

$$1 = \|e_j\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (e_j|e_i)^2 = 1 + \sum_{i \neq j} (e_j|e_i)^2\ ;$$

les $(e_j|e_i)^2$, avec $i \neq j$, étant tous positifs, on en déduit qu'ils sont nuls. La famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est donc orthogonale, et finalement orthonormale.

La famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est libre car orthonormale, il reste à prouver qu'elle est génératrice. Et cela résulte du cas d'égalité de l'inégalité de Bessel. Explicitons! Soit le sous-espace $V = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$, il s'agit de prouver que $V = E$. Or, si $x \in E$, d'après le cours, le projeté orthogonal de x sur V a pour expression $p_V(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (e_i|x)e_i$ et on a alors $\big\|p_V(x)\big\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (e_i|x)^2$, soit $\big\|p_V(x)\big\|^2 = \|x\|^2$ vu l'hypothèse. Mais la relation de Pythagore donne aussi $\|x\|^2 = \big\|p_V(x)\big\|^2 + \big\|x - p_V(x)\big\|^2$. On a donc ici $\big\|x - p_V(x)\big\| = 0$, donc $x = p_V(x) \in V$. Ainsi, $E \subset V$, donc $V = E$.

9.a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad T_n(\cos\theta) = \cos n\theta\ .$$

On pourra procéder par récurrence, après avoir transformé en produit l'expression $\cos(n+2)x + \cos nx$.

b. Pour $(P,Q) \in \big(\mathbb{R}[X]\big)^2$, on pose

$$(P|Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\ .$$

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. Montrer que la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale dans cet espace préhilbertien. En déduire une famille orthonormale. Peut-on parler de "base orthonormale" de $\mathbb{R}[X]$?

- -

a. Pour l'unicité, si deux polynômes T_n et U_n vérifient la relation **(1)**, on a alors $\forall\theta \in \mathbb{R}\quad T_n(\cos\theta) = U_n(\cos\theta)$, donc $\forall x \in [-1,1]\quad T_n(x) = U_n(x)$. Les fonctions polynomiales associées aux polynômes T_n et U_n coïncidant sur l'ensemble infini $[-1,1]$, on en déduit l'égalité des polynômes T_n et U_n.

Pour l'existence, on peut, soit utiliser la formule de Moivre et la formule du binôme, soit procéder par récurrence sur n (ce qui est plus simple et a l'avantage de fournir la relation de récurrence $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$).

La propriété à démontrer (existence de T_n) est vraie pour $n = 0$, $n = 1$, avec $T_0(x) = 1$ et $T_1(x) = x$.
Supposons-la vraie aux rangs n et $n+1$, n étant un entier naturel donné. En utilisant les formules de transformation de sommes en produits, nous avons

$$\cos(n+2)\theta + \cos n\theta = 2\cos(n+1)\theta\cos\theta\ ,$$

soit

$$\cos(n+2)\theta = 2\cos(n+1)\theta\ \cos\theta - \cos n\theta\ .$$

Or, par hypothèse, il existe des polynômes T_n et T_{n+1} tels que $\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$ et $\cos(n+1)\theta = T_{n+1}(\cos\theta)$. Nous en déduisons l'existence d'un polynôme T_{n+2} tel que $\cos(n+2)\theta = T_{n+2}(\cos\theta)$ et la relation de récurrence

$$T_{n+2}(x) = 2x\,T_{n+1}(x) - T_n(x)\ .$$

Nous obtenons ainsi $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$, $\cdots$; on vérifie facilement par une récurrence ("double") que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme T_n est de degré n et que, si $n \geq 1$, son coefficient dominant est 2^{n-1}. Les polynômes T_n sont appelés **polynômes de Tchebychev de première espèce**.

b. La première chose à vérifier est l'existence de l'intégrale définissant $(P|Q)$. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est définie et continue sur $]-1,1[$. Au voisinage du point 1, en posant $x = 1-h$ $(h \to 0^+)$, on a $f(x) = f(1-h) = \dfrac{P(1-h)Q(1-h)}{\sqrt{2h-h^2}}$; le numérateur est borné et $\dfrac{1}{\sqrt{2h-h^2}} \underset{h\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2h}}$, fonction intégrable sur $]0,a]$ pour tout $a > 0$. En procédant de même au voisinage de -1, on justifie l'intégrabilité de la fonction f sur $]-1,1[$.

La bilinéarité et la symétrie de l'application $(P,Q) \mapsto (P|Q)$ sont immédiates, de même que sa positivité : $(P|P) \geq 0$ pour tout P. Enfin, si $(P|P) = 0$, on a $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(x)^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$, l'intégrande étant une fonction continue, positive et intégrable sur $]-1,1[$, on déduit alors du théorème de stricte positivité que cette fonction est nulle sur $]-1,1[$, donc le polynôme P est le polynôme nul puisqu'il admet une infinité de racines.

Nous avons donc un produit scalaire, et $\mathbb{R}[X]$ est ainsi muni d'une structure d'espace préhilbertien réel.

En faisant le changement de variable $x = \cos\theta$ (ou, plus précisément, $\theta = \operatorname{Arccos} x$), on a, pour tous polynômes P et Q,

$$(P|Q) = \int_{\pi}^{0} \frac{P(\cos\theta)\, Q(\cos\theta)}{\sin\theta}\,(-\sin\theta)\, d\theta = \int_{0}^{\pi} P(\cos\theta)\, Q(\cos\theta)\, d\theta\ .$$

Si p et q sont deux entiers naturels, nous avons donc

$$(T_p|T_q) = \int_0^{\pi} \cos(p\theta)\ \cos(q\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi} \cos(p+q)\theta\,\mathrm{d}\theta + \int_0^{\pi} \cos(p-q)\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\ .$$

Or,

- pour tout $k \in \mathbf{Z}^*$, $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos k\theta\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{1}{k}\ \sin k\theta\right]_0^{\pi} = 0$;

- pour $k = 0$, $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos k\theta\,\mathrm{d}\theta = \pi$.

Il en résulte que, si $p \neq q$, $(T_p|T_q) = 0$: la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.

De plus,

$$\|T_0\|^2 = (T_0|T_0) = \pi \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \|T_k\|^2 = (T_k|T_k) = \frac{\pi}{2}\ .$$

En posant $P_0 = \dfrac{T_0}{\sqrt{\pi}}$ et $P_k = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,T_k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormale.

Remarque. De la relation de récurrence obtenue en **a.**, on déduit facilement, par récurrence, que $\deg(T_n) = n$ pour tout n. Il en résulte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base orthonormale du sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$. La famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est enfin une base de $\mathbb{R}[X]$ car elle est libre (i.e. toute sous-famille finie est libre car orthonormale) et génératrice (tout polynôme, si l'on note d son degré, est combinaison linéaire de P_0, P_1, $\cdots$, P_d).

10*. Soit E un espace euclidien, soit u un endomorphisme de E, de trace nulle.

a. Montrer qu'il existe un vecteur x non nul de E tel que $\big(u(x)|x\big) = 0$.

b. Montrer qu'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u a tous ses coefficients diagonaux nuls. *On pourra raisonner par récurrence sur la dimension de E.*

- -

a. Soit $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ une base orthonormale de E, on a alors $\operatorname{tr}(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \big(u(\varepsilon_i)|\varepsilon_i\big) = 0$.

Si tous les termes de cette somme sont nuls, alors $x = \varepsilon_i$ convient, pour n'importe quel $i \in [\![1, n]\!]$.

Sinon, comme la somme est nulle, il existe deux indices i et j distincts tels que $\big(u(\varepsilon_i)|\varepsilon_i\big) > 0$ et $\big(u(\varepsilon_j)|\varepsilon_j\big) < 0$. L'application $f : t \mapsto \Big(u\big((1-t)\varepsilon_i + t\varepsilon_j\ \big)\Big|(1-t)\varepsilon_i + t\varepsilon_j\Big)$ est continue sur $[0, 1]$, cela résulte notamment de la continuité des applications linéaires (l'endomorphisme

u) et bilinéaires (le produit scalaire) en dimension finie. Comme $f(0) > 0$ et $f(1) < 0$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in]0,1[$ tel que $f(t_0) = 0$. Le vecteur $x = (1-t_0)\varepsilon_i + t_0\varepsilon_j$ convient alors (il est non nul car ε_i et ε_j ne sont pas colinéaires).

b. Initialisation évidente: si $n = \dim(E) = 1$, si $\mathrm{tr}(u) = 0$, alors u est l'endomorphisme nul.

Soit $n \geq 2$, supposons la propriété vraie dans tout espace euclidien de dimension $n-1$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E euclidien de dimension n. La question **a.** permet d'obtenir un vecteur unitaire e_1 de E tel que $\big(u(e_1)|e_1\big) = 0$. Soit $D = \mathrm{Vect}(e_1)$ et $H = D^\perp$. Si $\mathcal{C} = (e_2, \cdots, e_n)$ est une base orthonormale de H, alors $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A \end{pmatrix}$ avec $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(u) = 0$. Notons v l'endomorphisme de H tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(v) = A$, on a alors $\mathrm{tr}(v) = \mathrm{tr}(A) = 0$. Par l'hypothèse de récurrence, il existe alors une base orthonormale $\mathcal{C}' = (e'_2, \cdots, e'_n)$ de H telle que les coefficients diagonaux de la matrice $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}(v)$ soient tous nuls. La famille $\mathcal{B}' = (e_1, e'_2, \cdots, e'_n)$ est alors une base orthonormale de E, et la matrice M' de u dans cette base a tous ses coefficients diagonaux nuls. En effet, soit $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ dans E. Comme le premier vecteur e_1 est inchangé et que $\mathrm{Vect}(e'_2, \cdots, e'_n) = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n) = H$, cette matrice est de la forme $P = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & Q \end{pmatrix}$ avec $Q = P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'} \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$. Un calcul par blocs montre que

$$M' = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & LQ \\ Q^{-1}C & A' \end{pmatrix} .$$

Les coefficients diagonaux de M', qui sont 0 et les coefficients diagonaux de A', sont donc nuls.

Projecteurs orthogonaux

11. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $I(a,b) = \displaystyle\int_0^\pi (a\sin x + b\cos x - x)^2\,\mathrm{d}x$. Déterminer le minimum de $I(a,b)$ lorsque (a,b) décrit $\mathbb{R}^2$.

- -

Soit $E = \mathcal{C}\big([0,\pi],\mathbb{R}\big)$, muni du produit scalaire $(f|g) = \displaystyle\int_{[0,\pi]} fg$. Soient les fonctions

$$e : x \mapsto x \quad ; \quad s : x \mapsto \sin x \quad ; \quad c : x \mapsto \cos x\ .$$

Alors $I(a,b) = \|e - (a\,s + b\,c)\|^2$ et, si l'on note P le plan vectoriel $P = \mathrm{Vect}(s,c)$, alors

$$m := \min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} I(a,b) = d(e,P)^2 = \|e\|^2 - \|p_P(e)\|^2\ ,$$

en notant p_P le projecteur orthogonal sur le plan P. D'autre part, si $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base orthonormale du plan P, on a

$$p_P(e) = (\varepsilon_1|e)\,\varepsilon_1 + (\varepsilon_2|e)\,\varepsilon_2 \qquad \text{et} \qquad \|p_P(e)\|^2 = (\varepsilon_1|e)^2 + (\varepsilon_2|e)^2\ .$$

La famille (s,c) est orthogonale puisque $(s|c)=\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,\cos x\,\mathrm{d}x=0$, il suffit donc de normer ces "vecteurs" pour avoir une base orthonormale du plan P. Or, $\|s\|^2=\|c\|^2=\displaystyle\int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi \cos^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$, on posera donc $\varepsilon_1=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,s$ et $\varepsilon_2=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,c$. On achève l'exerfife par quelques calculs d'intégrales :

$$(\varepsilon_1|e)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi x\sin x\mathrm{d}x=\sqrt{2\pi}\quad;\quad(\varepsilon_2|e)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi x\cos x\mathrm{d}x=-2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\quad;\quad\|e\|^2=\int_0^\pi x^2\mathrm{d}x=\frac{\pi^3}{3}\ ;$$

enfin,

$$m=\|e\|^2-(\varepsilon_1|e)^2-(\varepsilon_2|e)^2=\frac{\pi^3}{3}-2\pi-\frac{8}{\pi}\ .$$

---

12. L'espace vectoriel $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire $(A|B)=\mathrm{tr}(A^\top B)$. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1, soit $\mathcal{H}$ l'hyperplan constitué des matrices de trace nulle. Déterminer la distance $d(J,\mathcal{H})$.

- -

L'hyperplan $\mathcal{H}$ est constitué des matrices M telles que $\mathrm{tr}(I_n^\top M)=0$, autrement dit telles que $(I_n|M)=0$. L'orthogonal de l'hyperplan $\mathcal{H}$ est donc la droite vectorielle $D=\mathrm{Vect}(I_n)$ constituée des "matrices scalaires". Autrement dit, un "vecteur" unitaire normal à cet hyperplan $\mathcal{H}$ est la matrice $N=\dfrac{I_n}{\|I_n\|}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,I_n$. On en déduit, d'après le cours, que

$$d(J,\mathcal{H})=\big\|p_D(J)\big\|=\big\|(N|J)\,N\big\|=\big|(N|J)\big|=\frac{1}{\sqrt{n}}\,\mathrm{tr}(J)=\sqrt{n}\ .$$

---

13. Soit p un projecteur dans un espace euclidien E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x\in E\quad \|p(x)\|\leq\|x\|$.

- -

Posons $F=\mathrm{Im}\,p$ et $G=\mathrm{Ker}\,p$. On a alors $E=F\oplus G$, et p est le projecteur sur F parallèlement à G. Dire que p est un projecteur orthogonal signifie que $G=F^\perp$.

• Si p est un projecteur orthogonal, on a $\|p(x)\|\leq\|x\|$ pour tout x de E, c'est du cours, c'est l'**inégalité de Bessel**. Sa preuve est simple: on écrit $x=p(x)+\big(x-p(x)\big)$, avec $p(x)\in F$ et $x-p(x)\in G=F^\perp$, ces deux vecteurs sont donc orthogonaux et la relation de Pythagore donne $\|x\|^2=\|p(x)\|^2+\|x-p(x)\|^2\geq\|p(x)\|^2$.

• Si p vérifie la relation $\|p(x)\|\leq\|x\|$ pour tout x, choisissons x appartenant à $G^\perp$. Comme $p(x)-x\in G=\mathrm{Ker}\,p$, ces deux vecteurs sont orthogonaux et de nouveau Pythagore nous donne

$$\|p(x)\|^2=\big\|x+\big(p(x)-x\big)\big\|^2=\|x\|^2+\|p(x)-x\|^2\ .$$

L'hypothèse $\|p(x)\|\leq\|x\|$ entraîne alors que $\|p(x)-x\|^2\leq 0$, ce qui n'est possible que si $p(x)-x=0_E$, c'est-à-dire si $x\in F$. On a ainsi prouvé l'inclusion $G^\perp\subset F$. Comme $G^\perp$ et F

sont tous deux des supplémentaires de G, on a d'autre part égalité des dimensions, donc $G^\perp = F$, puis $(G^\perp)^\perp = F^\perp$, soit $G = F^\perp$, ce qu'il fallait démontrer.

---

14. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Écrire la matrice A (relativement à la base canonique) du projecteur orthogonal sur le sous-espace vectoriel F défini par les équations

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y+ & z & +t & = & 0 \\ x & - & y+ & z & -t & = & 0 \end{array}\right. .$$

- -

Le sous-espace F est un plan, que l'on peut définir plus simplement par le système équivalent $\left\{\begin{array}{lcl} x+z & = & 0 \\ y+t & = & 0 \end{array}\right.$. Une base de ce plan est $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, avec $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Mais nous avons besoin d'une base orthonormale de F pour pouvoir exprimer le projeté orthogonal d'un vecteur $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^4$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont déjà orthogonaux, il sufiit donc de les normer : en posant $\overrightarrow{e_1} = \dfrac{\overrightarrow{u}}{\sqrt{2}}$ et $\overrightarrow{e_2} = \dfrac{\overrightarrow{v}}{\sqrt{2}}$, nous disposons d'une base orthonormale $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ du plan F. Nous avons alors

$$\begin{aligned} p_F(\overrightarrow{X}) &= \left(\overrightarrow{e_1}|\overrightarrow{X}\right)\overrightarrow{e_1} + \left(\overrightarrow{e_2}|\overrightarrow{X}\right)\overrightarrow{e_2} \\ &= \frac{x-z}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{y-t}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-z \\ y-t \\ z-x \\ t-y \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

La matrice du projecteur p_F est alors $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

---

15. L'espace $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique défini par la relation $(A|B) = \mathrm{tr}(A^\top B) = \displaystyle\sum_{i,j} a_{i,j} b_{i,j}$. Soit $M = (m_{i,j}) \in E$. Calculer la distance de la matrice M au sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques.

- -

L'orthogonal dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du sous-espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est le sous-espace $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques : en effet, il est classique que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ils sont de plus orthogonaux puisque, si $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, alors

$$(A|S) = \mathrm{tr}(A^\top S) = \mathrm{tr}(-A\,S) = -\mathrm{tr}(A\,S)\ ,$$

mais aussi

$$(A|S) = (S|A) = \mathrm{tr}(S^\top A) = \mathrm{tr}(SA) = \mathrm{tr}(AS) = -(A|S)\ ,$$

finalement $(A|S) = 0$. La distance de la matrice M au sous-espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est la distance de M à son projeté orthogonal sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire la distance à son projeté sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ suivant la direction de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Autrement dit, si M se décompose en $M = S + A$ avec $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, alors $d\big(M, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\big) = \|A\|$. Or, il est classique (sinon, procéder par analyse-synthèse) que $S = \dfrac{1}{2}\big(M + M^\top\big)$ et $A = \dfrac{1}{2}\big(M - M^\top\big)$, donc

$$d\big(M, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\big) = \frac{1}{2}\,\|M - M^\top\| = \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i,j}(m_{i,j} - m_{j,i})^2} = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i<j}(m_{i,j} - m_{j,i})^2}\ .$$

---

16. Soit E un espace euclidien de dimension n, soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de E, soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur orthogonal de rang r.

a. Montrer que $\forall x \in E \quad \|p(x)\|^2 = \big(p(x)|x\big)$.

b. Calculer la somme $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2$.

- -

a. Il suffit de décomposer x en $x = p(x) + q(x)$, avec $q(x) = x - p(x) \in \mathrm{Ker}\,p = \big(\mathrm{Im}\,p\big)^\perp$, alors

$$\big(p(x)|x\big) = \big(p(x)|p(x) + q(x)\big) = \big(p(x)|p(x)\big) + \big(p(x)|q(x)\big) = \|p(x)\|^2$$

puisque les vecteurs $p(x)$ et $q(x)$ sont orthogonaux.

b. Alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|p(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \big(e_i|p(e_i)\big) = \mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p) = r$ puisque la trace d'un projecteur est égale à son rang.

---

17. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux dans un espace euclidien E. Prouver l'équivalence

$$\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(q) \iff \forall x \in E \quad \big\|p(x)\big\| \leq \big\|q(x)\big\|\ .$$

- -

• Supposons $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(q)$. Soient r et s les dimensions de $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Im}(q)$, alors $0 \leq r \leq s \leq n = \dim(E)$. Soit $(e_1, \cdots, e_r)$ une base orthonormale de $\mathrm{Im}(p)$, c'est alors une famille orthonormale dans $\mathrm{Im}(q)$, on peut donc la compléter en une base orthonormale $(e_1, \cdots, e_r, e_{r+1}, \cdots, e_s)$ de $\mathrm{Im}(q)$. Si x est un vecteur quelconque de E, on a alors $p(x) = \sum_{i=1}^{r} (e_i|x)e_i$ et $q(x) = \sum_{i=1}^{s} (e_i|x)e_i$, puis

$$\|p(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{r} (e_i|x)^2 \leq \sum_{i=1}^{s} (e_i|x)^2 = \|q(x)\|^2 ,$$

donc $\|p(x)\| \leq \|q(x)\|$.

• Supposons $\forall x \in E \quad \|p(x)\| \leq \|q(x)\|$. Si l'inclusion $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(q)$ était fausse, il existerait un vecteur x appartenant à $\mathrm{Im}(p)$ mais pas à $\mathrm{Im}(q)$. On aurait alors $p(x) = x$ mais $\|q(x)\| < \|x\|$ (le cas d'égalité dans l'inégalité de Bessel n'étant pas vérifié), donc $\|q(x)\| < \|p(x)\|$, ce qui est une contradiction. Ainsi, $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(q)$.

Isométries. Matrices orthogonales.

18. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice que l'on suppose à la fois orthogonale et triangulaire supérieure. Montrer que A est diagonale et que ses coefficients diagonaux valent 1 ou -1.

- -

Rappel : une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si $A^\top A = I_n$, c'est-à-dire :

- sur chaque colonne, la somme des carrés des coefficients vaut 1 ;

- la somme des produits deux à deux des coefficients de deux colonnes distinctes est nulle.

D'autre part, A étant triangulaire supérieure, on a $a_{i,j} = 0$ dès que $i > j$. Ainsi, sur la première colonne, on a $a_{1,1}^2 = 1$, d'où $a_{1,1} \in \{-1; 1\}$. En faisant le produit scalaire des deux premières colonnes, on a $a_{1,1}a_{1,2} = 0$, donc $a_{1,2} = 0$ puisque le coefficient diagonal $a_{1,1}$ est non nul. Il reste alors, sur la deuxième colonne, $a_{2,2}^2 = 1$ donc $a_{2,2} \in \{-1; 1\}$. On montre ainsi, par récurrence finie sur $j \in [\![1, n]\!]$, que la j-ième colonne C_j de la matrice A vaut $\pm E_j$, où E_j désigne le j-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Les détails sont laissés à l'improbable lecteur.

19.a. Soit E un espace euclidien. Soit $\mathcal{B}$ une base de E, soit $\mathcal{E}$ son orthonormalisée. Montrer que la matrice de passage de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux strictement positifs.

b. En déduire que, si A est une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors il existe une matrice orthogonale Q et une matrice triangulaire supérieure R à coefficients diagonaux strictement positifs telles que $A = QR$. En utilisant éventuellement l'exercice **18.** ci-dessus, montrer l'unicité de cette "décomposition QR".

- -

a. Notons $\mathcal{B} = (x_1, \cdots, x_n)$ et $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$. Soit $P = (a_{i,j}) = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$ la matrice de passage considérée. Pour tout couple (i, j), le coefficient $a_{i,j}$ est la i-ème coordonnée dans la base $\mathcal{E}$

du vecteur x_j, donc $a_{i,j} = (e_i|x_j)$ (*coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale*). D'après le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on a, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, les deux conditions

(1) : $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_j) = \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_j)$;

(2) : $(e_j|x_j) \in \mathbb{R}_+^*$.

La condition **(2)** exprime exactement que les coefficients diagonaux $a_{i,i}$ sont strictement positifs. La condition **(1)** entraîne que, pour tout j, le vecteur x_j appartient au sous-espace engendré par les e_i, avec $i \leq j$, autrement dit les coefficients $a_{i,j}$ avec $i > j$ sont nuls, et la matrice P est triangulaire supérieure.

b. Notons $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (muni de sa structure euclidienne canonique). La matrice A étant supposée inversible, on peut la voir comme matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ vers une certaine base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ (qui est en fait la famille des vecteurs-colonnes de A). Notons enfin $\mathcal{E}$ l'orthonormalisée de $\mathcal{B}$. On a alors la relation "de Chasles"

$$P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{E}} \cdot P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} \ , \quad \text{soit} \quad A = QR \ ,$$

où $Q = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{E}}$ est orthogonale puisque c'est la matrice de passage d'une base orthonormale vers une base orthonormale, et $R = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$ est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux strictement positifs d'après la question **a.**

Remarque. On peut en fait montrer l'unicité d'une telle écriture : en effet, supposons $A = Q_1 R_1 = Q_2 R_2$, avec Q_1 et Q_2 orthogonales, R_1 et R_2 triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs. On a alors $Q_2^{-1} Q_1 = R_2 R_1^{-1}$. Or, la structure de groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ fait que $Q_2^{-1} Q_1$ est orthogonale. On peut montrer que l'ensemble $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs est aussi un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (*i.e. stable par produit et par passage à l'inverse*), donc $R_2 R_1^{-1} \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$. L'exercice **18.** ci-dessus permet alors de déduire que $R_2 R_1^{-1} = Q_2^{-1} Q_1 = I_n$, et donc $R_1 = R_2$ et $Q_1 = Q_2$.

---

20. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{O}(n)$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i,j} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{n}$ et $\displaystyle\left|\sum_{i,j} a_{i,j}\right| \leq n$. *On pourra utiliser le vecteur* $U = (1, 1, \cdots, 1)$ *de* $\mathbb{R}^n$.

- -

---

21. Soit $u \in \mathrm{O}(E)$, où E est un espace euclidien.

a. Montrer que $\big(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)\big)^\perp = \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E)$.

b. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère l'endomorphisme $r_k = \dfrac{1}{k} \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} u^j$. Soit x un vecteur de E.

Déterminer $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} r_k(x)$.

- -

Dans tout l'exercice, on posera $F = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ et $G = \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E)$.

a. Soient $x \in F$ et $y \in G$; alors $u(x) = x$ et il existe $z \in E$ tel que $y = u(z) - z$. Alors

$$(x|y) = \big(x|u(z) - z\big) = \big(x|u(z)\big) - (x|z) = \big(u(x)|u(z)\big) - (x|z) = 0$$

puisque u est un automorphisme orthogonal, donc conserve le produit scalaire. On a donc montré que les sous-espaces F et G sont orthogonaux, ce qui signifie par exemple que $G \subset F^{\perp}$. Mais on sait que $F^{\perp}$ est un supplémentaire de F, donc $\dim(F^{\perp}) = \dim E - \dim F$, et on a aussi $\dim G = \dim E - \dim F$ par le théorème du rang. Finalement, $G = F^{\perp}$, ce qu'il fallait démontrer.

b. Soit $x \in E$, on le décompose en $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G = F^{\perp}$. Alors $u(y) = y$, donc par récurrence immédiate, $u^j(y) = y$ pour tout j, puis $r_k(y) = y$ pour tout entier k. D'autre part, il existe $z' \in E$ tel que $z = u(z') - z'$, alors $u^j(z) = u^{j+1}(z') - u^j(z')$ et

$$r_k(z) = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} u^j(z) = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\big(u^{j+1}(z') - u^j(z')\big) = \frac{1}{k}\Big(u^k(z') - z'\Big)$$

(somme télescopique). Comme $u \in \mathrm{O}(E)$ conserve la norme, on a

$$\|r_k(z)\| = \frac{1}{k}\left\|u^k(z') - z'\right\| \leq \frac{1}{k}\Big(\|u^k(z')\| + \|z'\|\Big) = \frac{2}{k}\,\|z'\| \quad \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \quad 0\ ,$$

donc $\lim\limits_{k\to+\infty} r_k(z) = 0_E$. Finalement, $\lim\limits_{k\to+\infty} r_k(x) = y = p_F(x)$. Dans l'espace vectoriel E, la suite $\big(r_k(x)\big)$ converge vers le vecteur $p_F(x)$, projeté orthogonal de x sur $F = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$.