

## ESPACES PRÉHILBERTIENS

### I. Produit scalaire et norme associée.

Sur ce sujet, presque tout a déjà été dit dans le chapitre “espaces vectoriels normés”, paragraphe **I.3**. Il y aura ici juste quelques petits rajouts.

Dans tout ce paragraphe,  $E$  est un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire sera noté  $(\cdot|\cdot)$ , et on notera  $\|\cdot\|$  la norme associée, définie par  $\forall x \in E \quad \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ .

On rappelle l'**inégalité de Cauchy-Schwarz**  $|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$ , et le fait qu'il y a égalité si et seulement si les vecteurs  $x$  et  $y$  sont colinéaires.

*Preuve.* Voici une preuve différente de celle vue dans le cours sur les espaces vectoriels normés: Soient  $x \in E$ ,  $y \in E$ . Si  $x$  ou  $y$  est nul, alors  $|(x|y)| = \|x\| \|y\| = 0$ . Sinon, considérons les vecteurs unitaires associés  $u = \frac{x}{\|x\|}$  et  $v = \frac{y}{\|y\|}$ . On a alors

$$0 \leq \|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2(u|v) = 2(1 - (u|v)) = 2\left(1 - \frac{(x|y)}{\|x\| \|y\|}\right),$$

on en déduit que  $(x|y) \leq \|x\| \|y\|$ . En faisant le même développement avec  $\|u + v\|^2 \geq 0$ , on obtient  $-(x|y) \leq \|x\| \|y\|$ , puis on conclut que  $|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$ .

Si  $x$  est nul ou  $y = \lambda x$ , alors  $|(x|y)| = \|x\| \|y\|$  immédiatement. Réciproquement, si on a cette égalité, alors soit  $x = 0$  ou  $y = 0$ , soit  $u - v = 0$  ou  $u + v = 0$  en reprenant les notations de la preuve ci-dessus, on en déduit dans tous les cas que  $x$  et  $y$  sont colinéaires.

On en déduit le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire: l'**égalité**  $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$  a lieu si et seulement si les vecteurs  $x$  et  $y$  sont “positivement liés”, i.e.

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \iff (x = 0_E) \text{ ou } (\exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \ y = \lambda x).$$

*Preuve.* Reprenons la démonstration de l'inégalité triangulaire: si  $(x, y) \in E^2$ ,

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y|x + y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y) \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x|y)| \quad (1) \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\| \quad (2) \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Il y a alors égalité entre les termes extrêmes  $\|x + y\|^2$  et  $(\|x\| + \|y\|)^2$  si et seulement s'il y a égalité en (1) et en (2). Or, (2) est l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans laquelle l'égalité est réalisée si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires. Et l'inégalité (1) est une égalité si et seulement si  $(x|y) \geq 0$  ce qui, dans le cas de vecteurs colinéaires, signifie qu'ils sont “de même sens” (au sens large, i.e. l'un des deux vecteurs pouvant être nul).

**Remarque.** Ce cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire concerne uniquement les normes dérivant d'un produit scalaire, ce n'est pas vrai pour une norme quelconque.

Mentionnons maintenant quelques **identités remarquables** sur les normes associées à un produit scalaire. Des développements

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$$

et

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y),$$

on déduit (en ajoutant les deux) l'**identité du parallélogramme**:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

et, en soustrayant les deux, l'**identité de polarisation**:

$$(x|y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

Cette dernière permet d'exprimer le produit scalaire de deux vecteurs à l'aide de normes, et aura des conséquences importantes (par exemple, un endomorphisme de  $E$  conserve la norme si et seulement s'il conserve le produit scalaire).

**Remarque.** L'identité du parallélogramme indique que, si  $ABCD$  est un parallélogramme, alors la somme des longueurs de ses deux diagonales est égale à la somme des longueurs de ses quatre côtés:

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 .$$

## II. Orthogonalité.

### 1. Vecteurs orthogonaux.

Dans un espace préhilbertien  $E$ , on dit que deux vecteurs  $x$  et  $y$  sont **orthogonaux** lorsque leur produit scalaire  $(x|y)$  est nul.

On peut caractériser l'orthogonalité de deux vecteurs par le

**Théorème de Pythagore.** Deux vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$  sont orthogonaux si et seulement si

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

*Preuve.* Il suffit de développer  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$ , on a donc bien l'équivalence

$$(x|y) = 0 \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

**Commentaire.** On retrouve le théorème de Pythagore et sa réciproque de la géométrie de collège: un triangle  $ABC$  est rectangle en  $A$  si et seulement si  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ , le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

**Définition.** Une famille  $(x_i)_{i \in I}$  de vecteurs de  $E$  est dite **orthogonale** si les vecteurs  $x_i$  sont deux à deux orthogonaux, i.e.

$$\forall (i, j) \in I^2 \quad i \neq j \implies (x_i|x_j) = 0 .$$

**Proposition.** Toute famille (finie) orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

*Preuve.* Soit  $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)$  une famille orthogonale finie dans  $E$  préhilbertien, les vecteurs  $x_i$  étant tous non nuls. Supposons que l'on ait  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E$ , où  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont des réels. Fixons un indice  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . En faisant le produit scalaire avec  $x_j$  de l'égalité ci-dessus, on obtient  $(x_j | \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) = (x_j | 0_E) = 0$ , soit  $\sum_{i=1}^n \lambda_i (x_j | x_i) = 0$ , soit  $\lambda_j \|x_j\|^2 = 0$ , donc  $\lambda_j = 0$  puisque le vecteur  $x_j$  n'est pas nul.

**Proposition.** Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille orthogonale finie dans  $E$  préhilbertien. On a alors la relation de Pythagore:

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 .$$

*Preuve.* Le développement par bilinéarité du produit scalaire et l'orthogonalité deux à deux des vecteurs donnent immédiatement

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \left( \sum_{i=1}^n x_i \mid \sum_{j=1}^n x_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i \mid x_j) = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 .$$

**Définition.** On appelle **famille orthonormale** (ou **orthonormée**) de vecteurs toute famille orthogonale constituée de vecteurs unitaires. La famille  $(x_i)_{i \in I}$  est donc orthonormale si et seulement si

$$\forall (i, j) \in I^2 \quad (x_i \mid x_j) = \delta_{i,j} .$$

Il résulte de ce qui précède que **toute famille orthonormale finie est libre**.

## 2. Sous-espaces orthogonaux.

Dans un espace préhilbertien  $E$ , on dit que deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  sont **orthogonaux** lorsque tout vecteur de  $F$  est orthogonal à tout vecteur de  $G$ , i.e.

$$\forall (y, z) \in F \times G \quad (y \mid z) = 0 .$$

On note parfois  $F \perp G$ .

Il est immédiat que, si  $F$  et  $G$  sont orthogonaux, alors  $F \cap G = \{0_E\}$ , i.e.  $F$  et  $G$  sont en somme directe. *En effet, si  $x \in F \cap G$ , alors  $(x \mid x) = 0$ , donc  $x = 0_E$  par le caractère défini du produit scalaire.*

Plus généralement,

**Proposition.** Si  $F_1, \dots, F_m$  sont des s.e.v. deux à deux orthogonaux, alors ils sont en somme directe.

*Preuve.* En effet, supposons que l'on ait  $\sum_{i=1}^m x_i = 0_E$  avec  $x_i \in F_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , il faut montrer que tous les vecteurs  $x_i$  sont nuls. Fixons alors un indice  $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , on a

$$\left( x_j \mid \sum_{i=1}^m x_i \right) = (x_j \mid 0_E) = 0 ,$$

mais aussi, par linéarité à droite,

$$\left( x_j \mid \sum_{i=1}^m x_i \right) = \sum_{i=1}^m (x_j \mid x_i) = \|x_j\|^2 .$$

Donc  $\|x_j\|^2 = 0$  puis  $x_j = 0_E$  pour tout  $j$ , ce qu'il fallait prouver. On parle dans cette situation de **somme directe orthogonale**, et le sous-espace somme  $S = \bigoplus_{i=1}^m F_i$  peut être noté

$$S = F_1 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} F_m = \bigoplus_{1 \leq i \leq m} F_i .$$

## 3. Orthogonal d'une partie, d'un sous-espace.

**Définition 1.** Soit  $X$  une partie d'un espace préhilbertien  $E$ , on dit qu'un vecteur  $v$  de  $E$  est **orthogonal** à  $X$  s'il est orthogonal à tout vecteur de  $X$ , i.e. si  $\forall x \in X \quad (v \mid x) = 0$ .

**Définition 2.** Si  $X$  est une partie de  $E$ , on définit l'**orthogonal** de  $X$ , noté  $X^\perp$ , comme étant l'ensemble des vecteurs orthogonaux à  $X$ . Ainsi,  $X^\perp$  est l'ensemble des vecteurs qui sont orthogonaux à tout vecteur de  $X$ :

$$X^\perp = \{v \in E \mid \forall x \in X \quad (v|x) = 0\}.$$

Voici quelques propriétés élémentaires:

- $X^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .  
En effet,  $0_E \in X^\perp$  et, si  $v$  et  $w$  sont dans  $X^\perp$ , si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors pour tout  $x \in X$ , on a  
 $(\lambda v + w|x) = \lambda(v|x) + (w|x) = 0$ ,  
donc  $\lambda v + w \in X^\perp$ .
- $\{0_E\}^\perp = E$  et  $E^\perp = \{0_E\}$ .
- Si  $X \subset Y$ , alors  $Y^\perp \subset X^\perp$ .
- $X \subset (X^\perp)^\perp$ .

Cette notion sera plus particulièrement utile lorsque la partie  $X$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Notons à ce sujet que:

- Si  $x_1, \dots, x_n$  sont des vecteurs de  $E$ , alors

$$\{x_1, \dots, x_n\}^\perp = (\text{Vect}(x_1, \dots, x_n))^\perp.$$

Il est évident que  $(\text{Vect}(x_1, \dots, x_n))^\perp \subset \{x_1, \dots, x_n\}^\perp$ . De plus, la bilinéarité du produit scalaire entraîne que, si un vecteur  $v$  est orthogonal à chacun des  $x_i$ , alors il est orthogonal à toute combinaison linéaire des  $x_i$ , et cela fournit l'inclusion réciproque.

**À retenir: pour qu'un vecteur soit orthogonal à un s.e.v.  $F$  de dimension finie, il suffit qu'il soit orthogonal à tous les vecteurs d'une famille génératrice de  $F$ .**

Dans ce qui suit,  $F$  et  $G$  désignent des sous-espaces de  $E$ .

- Le sous-espace  $F^\perp$  est orthogonal à  $F$  (évident), et en conséquence  $F \cap F^\perp = \{0_E\}$ .
- $F \subset (F^\perp)^\perp$  (preuve facile)... mais l'inclusion inverse n'est pas toujours vraie, cf. exemple ci-dessous.
- Si  $F$  et  $G$  sont des s.e.v. tels que  $F \subset G$ , alors  $G^\perp \subset F^\perp$ .

**Remarque 1.** Deux sous-espaces  $F$  et  $G$  de  $E$  sont orthogonaux lorsque tout vecteur de l'un est orthogonal à tout vecteur de l'autre, ce qui signifie que chacun des deux sous-espaces est inclus dans l'orthogonal de l'autre (mais cela ne veut pas dire que  $G = F^\perp$  !). Donc

$$F \perp G \iff F \subset G^\perp \iff G \subset F^\perp.$$

**Remarque 2.** Si l'on a toujours  $F \cap F^\perp = \{0_E\}$ , autrement dit  $F$  et  $F^\perp$  sont en somme directe, il ne faut pas croire que  $F$  et  $F^\perp$  sont toujours supplémentaires, voici en effet un exemple où l'on a  $F \oplus F^\perp \neq E$ . Prenons  $E = \mathbb{R}[X]$ , le produit scalaire choisi étant  $(P, Q) \mapsto (P|Q) = \int_0^1 P(t) Q(t) dt$ , le lecteur vérifiera facilement que c'est bien un produit

scalaire. Soit le s.e.v.  $H = X \cdot \mathbb{R}[X] = \{P \in E \mid P(0) = 0\}$ , alors  $H$  est un hyperplan de  $E$  puisque  $H = \text{Ker } \varphi$ , où  $\varphi$  est la forme linéaire non nulle  $P \mapsto \varphi(P) = P(0)$ . Alors  $H^\perp = \{0\}$ : en effet, si  $P \in H^\perp$ , alors  $(P|XP) = 0$ , soit  $\int_0^1 t P(t)^2 dt = 0$ , ce qui entraîne que  $\forall t \in [0, 1] \quad t P(t)^2 = 0$  (théorème de stricte positivité, la fonction  $t \mapsto t P(t)^2$  étant continue et positive sur  $[0, 1]$ ), puis que  $P$  est le polynôme nul puisqu'il a une infinité de racines. On voit déjà sur cet exemple que  $(H^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = E \neq H$ , mais aussi que  $H^\perp$  n'est pas un supplémentaire de  $H$  dans  $E$  puisque  $H \oplus H^\perp = H \oplus \{0\} = H \neq E$ .

### III. Un petit détour par les espaces euclidiens.

#### 1. Existence de bases orthonormales.

**Théorème.** Dans tout espace euclidien  $E$ , il existe des bases orthonormales.

*Preuve.* Par récurrence sur la dimension  $n = \dim(E)$ .

- Initialisation: si  $n = 1$ , soit  $x \in E$  un vecteur non nul, alors  $\omega = \frac{x}{\|x\|}$  est unitaire, et  $(\omega)$  est une base orthonormale de  $E$ .

- Hérédité: soit  $n \geq 2$ , supposons la propriété vraie en dimension  $n - 1$ , soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ . De nouveau, soit  $x \in E$  un vecteur non nul, posons  $e_n = \frac{x}{\|x\|}$ , soit  $D = \text{Vect}(e_n)$  la droite vectorielle engendrée par le vecteur unitaire  $e_n$ . L'application  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto (e_n|y)$  est une forme linéaire sur  $E$ , non nulle puisque  $\varphi(e_n) = \|e_n\|^2 = 1$ , son noyau  $H = \text{Ker}(\varphi) = D^\perp$  est donc un hyperplan de  $E$ , donc  $\dim(H) = n - 1$ . Si l'on munit  $H$  de la restriction du produit scalaire de  $E$ , alors  $H$  est un espace euclidien de dimension  $n - 1$ . D'après l'hypothèse de récurrence, il existe dans  $H$  une base orthonormale  $(e_1, \dots, e_{n-1})$ . Comme les vecteurs  $e_i, 1 \leq i \leq n - 1$ , sont tous orthogonaux au vecteur  $e_n$ , il est immédiat que  $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$  est une famille orthonormale dans  $E$ , donc libre, et c'est donc une base de  $E$  puisqu'elle est de cardinal  $n$ .

**Commentaire.** Nous (re)verrons un peu plus loin un procédé algorithmique, le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, permettant la construction effective d'une base orthonormale de  $E$  en partant d'une base quelconque.

#### 2. Supplémentaire orthogonal d'un s.e.v.

**Proposition.** Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ , soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $p$ . Alors  $F^\perp$  est un supplémentaire de  $F$  dans  $E$  et, en particulier,  $\dim(F) = n - p$ .

*Preuve.* D'après le théorème ci-dessus, comme  $F$  est un espace euclidien si on le munit de la restriction du produit scalaire de  $E$ , on sait qu'il existe dans  $F$  une base orthonormale  $(e_1, \dots, e_p)$ . Considérons l'application

$$\varphi : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R}^p \\ x \mapsto ((e_1|x), \dots, (e_p|x)) \end{cases}.$$

Cette application  $\varphi$  est clairement linéaire. Elle est surjective, i.e.  $\text{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^p$  puisque, si l'on se donne un élément de l'espace d'arrivée  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ , il admet pour antécédent le vecteur  $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p$ : on a en effet  $(e_i|x) = \lambda_i$  pour tout  $i \in [1, p]$ . Enfin, il est

immédiat que  $\text{Ker}(\varphi) = F^\perp$  : en effet, un vecteur de  $E$  est orthogonal à  $F$  si et seulement s'il est orthogonal à tous les vecteurs d'une famille génératrice de  $F$ . En appliquant à  $\varphi$  le théorème du rang, on obtient que

$$\dim(F^\perp) = \dim(\text{Ker}(\varphi)) = \dim(E) - \dim(\text{Im}(\varphi)) = n - p.$$

Comme on sait que  $F \cap F^\perp = \{0_E\}$ , on déduit que  $\dim(F \oplus F^\perp) = p + (n - p) = n = \dim(E)$ , donc  $F \oplus F^\perp = E$ .

**Commentaire.** On dit, dans cette situation, que  $F^\perp$  est **le supplémentaire orthogonal** de  $F$ . Je rappelle que tout sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  (exceptés  $E$  et  $\{0_E\}$ ) admet une infinité de supplémentaires, mais parmi tous ces supplémentaires, un seul est orthogonal à  $F$  d'où l'usage de l'article défini "le". Nous verrons dans le paragraphe suivant une situation plus générale dans laquelle l'orthogonal d'un sous-espace  $F$  est un supplémentaire de  $F$ .

**Théorème de la base orthonormée incomplète.** Si  $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_p)$  est une famille orthonormale dans un espace euclidien  $E$  de dimension  $n$ , alors  $p \leq n$ , et on peut compléter  $\mathcal{X}$  en une base orthonormale  $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_n)$  de  $E$ .

*Preuve.* La famille  $\mathcal{X}$  est orthonormale, donc libre, d'où  $p \leq n$ . Soit le s.e.v.  $F = \text{Vect}(\mathcal{X})$  qui est de dimension  $p$ , la famille  $\mathcal{X}$  est alors une base orthonormale de  $F$ . Puis  $F^\perp$  est de dimension  $n - p$ , et il suffit de choisir dans  $F^\perp$  une base orthonormale  $(x_{p+1}, \dots, x_n)$  pour compléter  $\mathcal{X}$  en une b.o.n. de  $E$ .

### 3. Calculs en base orthonormale (BON).

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ , et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormale de  $E$ .

Notons d'abord que, si  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  est un vecteur de  $E$ , alors pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a

$$(e_j | x) = \left( e_j \mid \sum_{i=1}^n x_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n x_i (e_i | e_j) = \sum_{i=1}^n x_i \delta_{i,j} = x_j.$$

On peut donc énoncer:

**Proposition 1.** Les coordonnées d'un vecteur  $x$  dans une base orthonormale  $\mathcal{B}$  sont les produits scalaires de ce vecteur  $x$  avec les vecteurs de la base  $\mathcal{B}$ :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad x_i = (e_i | x).$$

On a donc, pour tout  $x \in E$ , la décomposition  $x = \sum_{i=1}^n (e_i | x) e_i$ .

Si  $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$  est un autre vecteur de  $E$ , on a, par bilinéarité du produit scalaire,

$$(x | y) = \left( \sum_{i=1}^n x_i e_i \mid \sum_{j=1}^n y_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (e_i | e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \delta_{i,j} = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

On peut donc énoncer:

**Proposition 2.** Le produit scalaire de deux vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$  est la somme des produits deux à deux des coordonnées des deux vecteurs dans une base orthonormale  $\mathcal{B}$ :

$$(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = X^\top Y,$$

en introduisant les matrices-colonnes  $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ,  $Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ .

$$\text{Donc } \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = (X^\top X)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit maintenant  $u$  un endomorphisme de  $E$ , soit  $A = (a_{i,j}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  sa matrice relativement à une base orthonormale  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ . On a donc  $u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$  pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Le coefficient  $a_{i,j}$  est donc la  $i$ -ème coordonnée dans la base  $\mathcal{B}$  du vecteur  $u(e_j)$ , ce qui, d'après la **Proposition 1** ci-dessus, permet de l'exprimer comme un produit scalaire, à savoir

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad a_{i,j} = (e_i | u(e_j)).$$

On en déduit par exemple que  $\text{tr}(u) = \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n (e_i | u(e_i))$ .

#### IV. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie.

##### 1. Supplémentaire orthogonal.

Voici un résultat qui généralise la proposition du paragraphe **III.2.**:

**Théorème.** Soit  $V$  un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace  $E$  préhilbertien. Alors  $V^\perp$  est un supplémentaire de  $V$  dans  $E$ .

**Remarque.** On dit parfois que  $V$  "admet un supplémentaire orthogonal".

*Preuve. Par analyse-synthèse.* Comme  $V$ , muni de la restriction du produit scalaire de  $E$ , est un espace euclidien, il existe dans  $V$  des bases orthonormales, choisissons-en une,  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ .

*Analyse.* Soit  $x \in E$ , supposons que  $x$  admette une décomposition en  $x = y + z$  avec  $y \in V$  et  $z \in V^\perp$ . Comme  $y \in V$ , le vecteur  $y$  se décompose dans  $\mathcal{B}$  sous la forme  $y = \sum_{i=1}^n (e_i | y) e_i$ .

Mais, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , comme  $e_i \in V$  et  $z \in V^\perp$ , on a  $(e_i | y) = (e_i | x) - (e_i | z) = (e_i | x)$ .

Finalement, on a explicité  $y$  et  $z$  en fonction de  $x$ : (\*) 
$$\begin{cases} y = \sum_{i=1}^n (e_i | x) e_i \\ z = x - \sum_{i=1}^n (e_i | x) e_i \end{cases}, \text{ ce qui prouve}$$

l'unicité de la décomposition de ce vecteur  $x$ .

*Synthèse.* Soit  $x \in E$ , soient  $y$  et  $z$  définis par (\*), il est alors clair que  $x = y + z$  et que  $y \in V$ . Enfin,  $z$  est orthogonal à chaque vecteur  $e_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) puisque

$$(e_j|z) = \left( e_j \left| x - \sum_{i=1}^n (e_i|x) e_i \right. \right) = (e_j|x) - \sum_{i=1}^n (e_i|x) (e_j|e_i) = (e_j|x) - \sum_{i=1}^n (e_i|x) \delta_{i,j} = 0 ,$$

le vecteur  $z$  est donc orthogonal à tous les vecteurs d'une famille génératrice de  $V$ , on a bien  $z \in V^\perp$ . La décomposition **(\*)** convient.

**Remarque.** Dans cette situation, on a  $(V^\perp)^\perp = V$ . En effet, l'inclusion  $V \subset (V^\perp)^\perp$  est toujours vraie. De plus, si  $x \in (V^\perp)^\perp$ , d'après le théorème ci-dessus, on peut le décomposer en  $x = y + z$  avec  $y \in V$  et  $z \in V^\perp$ . En effectuant le produit scalaire avec  $z$ , on a  $(z|x) = (z|y) + \|z\|^2$ , mais les produits scalaires  $(z|x)$  et  $(z|y)$  sont nuls tous les deux, il reste donc  $\|z\|^2 = 0$ , soit  $z = 0_E$ , donc  $x = y$  et  $x \in V$ .

## 2. Projection orthogonale.

**Définition.** Soit  $V$  un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien  $E$ . Comme  $E = V \oplus V^\perp$ , on peut définir le projecteur sur  $V$  parallèlement à  $V^\perp$ , on l'appelle **projecteur orthogonal sur  $V$**  (ou **projection orthogonale sur  $V$** ), et on le note  $p_V$ . Pour tout  $x \in E$ , le vecteur  $p_V(x)$  est le **projeté orthogonal** de  $x$  sur  $V$ .

De la preuve du théorème ci-dessus, il résulte que:

**Si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormale de  $V$ , alors**

$$\forall x \in E \quad p_V(x) = \sum_{i=1}^n (e_i|x) e_i .$$

Mentionnons aussi l'**inégalité de Bessel**:

**Proposition.** Si  $V$  est un sous-espace de dimension finie dans  $E$  préhilbertien, alors on a

$$\forall x \in E \quad \|p_V(x)\| \leq \|x\| ,$$

avec égalité si et seulement si  $x \in V$ .

*Preuve.* On écrit  $x = p_V(x) + (x - p_V(x))$ , c'est la décomposition du vecteur  $x$  selon la somme directe  $E = V \oplus V^\perp$ . Les vecteurs  $p_V(x)$  et  $x - p_V(x)$  sont orthogonaux l'un à l'autre, la relation de Pythagore donne alors

$$\|x\|^2 = \|p_V(x)\|^2 + \|x - p_V(x)\|^2 \geq \|p_V(x)\|^2 ,$$

avec égalité ssi  $\|x - p_V(x)\| = 0$ , i.e. ssi  $x = p_V(x)$ , i.e. ssi  $x \in V$ .

**Remarque.** On peut noter que le produit scalaire d'un vecteur avec son projeté orthogonal est toujours positif, et plus précisément que  $(x | p_V(x)) = \|p_V(x)\|^2$ . En effet, en décomposant le vecteur  $x$  comme ci-dessus et par bilinéarité du produit scalaire,

$$(x | p_V(x)) = (p_V(x) | p_V(x)) + (x - p_V(x) | p_V(x)) = \|p_V(x)\|^2 ,$$

le deuxième terme étant nul.

**Autre forme de l'inégalité de Bessel.** Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille orthonormale finie dans un espace préhilbertien  $E$ . On a alors

$$\forall x \in E \quad \sum_{i=1}^n (e_i | x)^2 \leq \|x\|^2,$$

avec égalité si et seulement si  $x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ .

*Preuve.* Il suffit effectivement d'appliquer l'inégalité de Bessel prouvée ci-dessus en prenant  $V = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ . Comme  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est alors une base orthonormale de  $V$ , on a

$$p_V(x) = \sum_{i=1}^n (e_i | x) e_i \quad \text{et} \quad \|p_V(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n (e_i | x)^2, \quad \text{c'est donc bien la même inégalité.}$$

**Pratique.** Pour déterminer le projeté orthogonal d'un vecteur  $x$  de  $E$  sur un s.e.v.  $V$  de dimension finie, on peut:

- soit appliquer la formule  $p_V(x) = \sum_{i=1}^n (e_i | x) e_i$  si l'on connaît une base orthonormale  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $V$ ,
- soit obtenir les coordonnées de  $p_V(x)$  dans une base quelconque de  $V$  en annulant des produits scalaires, cette méthode est détaillée ci-dessous.

Soit donc  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  une base quelconque de  $V$ , soit  $x \in E$ , soit  $y = p_V(x)$ . Ce vecteur  $y$  est caractérisé par les conditions  $\begin{cases} y \in V \\ x - y \in V^\perp \end{cases}$ , soit  $\begin{cases} (1) : y \in V \\ (2) : \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad (\varepsilon_i | x - y) = 0 \end{cases}$ .

La condition (1) nous amène à rechercher  $y$  sous la forme  $y = \sum_{j=1}^n y_j \varepsilon_j$ , avec les  $y_j$  réels.

La condition (2) se traduit alors par le système linéaire

$$(S) : \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \sum_{j=1}^n (\varepsilon_i | \varepsilon_j) y_j = (\varepsilon_i | x)$$

de  $n$  équations à  $n$  inconnues. La matrice de ce système (S) est la **matrice de Gram**  $G = ((\varepsilon_i | \varepsilon_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , soit

$$G = \begin{pmatrix} \|\varepsilon_1\|^2 & (\varepsilon_1 | \varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_1 | \varepsilon_n) \\ (\varepsilon_2 | \varepsilon_1) & \|\varepsilon_2\|^2 & \cdots & (\varepsilon_2 | \varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varepsilon_n | \varepsilon_1) & (\varepsilon_n | \varepsilon_2) & \cdots & \|\varepsilon_n\|^2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice symétrique est inversible. En effet, supposons qu'une combinaison linéaire des colonnes  $C_1, \dots, C_n$  de cette matrice est nulle, soit  $\sum_{j=1}^n \lambda_j C_j = 0$  (dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$ ).

Alors, en regardant coordonnée par coordonnée, on a  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j (\varepsilon_i | \varepsilon_j) = 0$ ,

soit  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \left( \varepsilon_i \mid \sum_{j=1}^n \lambda_j \varepsilon_j \right) = 0$ , le vecteur  $\sum_{j=1}^n \lambda_j \varepsilon_j$ , qui est dans  $V$  vu son écriture, est

aussi dans  $V^\perp$ , donc est nul, ce qui entraîne la nullité de tous les réels  $\lambda_j$  puisque la famille  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  est libre. Les colonnes de la matrice  $G$  sont donc linéairement indépendantes, donc  $\text{rg}(G) = n$ , et  $G$  est inversible. Le système (S) est donc un système de Cramer, il admet une solution unique.

**Exercice.** On munit  $E = \mathbb{R}[X]$  du produit scalaire  $(P, Q) \mapsto (P|Q) = \int_0^1 P(t) Q(t) dt$ . Déterminer le projeté orthogonal de  $P = X^2$  sur le plan  $V = \mathbb{R}_1[X] = \text{Vect}(1, X)$ .

### 3. Distance à un sous-espace de dimension finie.

Dans ce paragraphe,  $V$  est toujours un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien réel  $E$ . Si  $x$  est un vecteur quelconque de  $E$ , son projeté orthogonal  $p_V(x)$  est alors le vecteur de  $V$  "le plus proche" de  $x$ . Plus précisément, on a la

**Proposition.** Si  $x \in E$ , son projeté  $p_V(x)$  est l'unique vecteur  $y_0$  de  $V$  tel que

$$\|x - y_0\| = \min_{y \in V} \|x - y\|.$$

*Preuve.* Si  $y \in V$ , alors  $x - y = (x - p_V(x)) + (p_V(x) - y)$ , avec  $x - p_V(x) \in V^\perp$  et  $p_V(x) - y \in V$ , ces deux vecteurs sont donc orthogonaux, d'où la relation de Pythagore:

$$\|x - y\|^2 = \|x - p_V(x)\|^2 + \|p_V(x) - y\|^2 \geq \|x - p_V(x)\|^2,$$

avec égalité si et seulement si  $y = p_V(x)$ .

Cette distance minimale du vecteur  $x$  fixé à un vecteur  $y$  décrivant le s.e.v.  $V$  est appelée **distance de  $x$  à  $V$** , et notée  $d(x, V)$ . On a ainsi

$$d(x, V) = \min_{y \in V} d(x, y) = \min_{y \in V} \|x - y\| = \|x - p_V(x)\|.$$

**Calcul pratique.** Si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormale de  $V$ , on a

$$d(x, V)^2 = \|x - p_V(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_V(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n (e_i|x)^2,$$

l'égalité du milieu résultant de Pythagore puisque les vecteurs  $p_V(x)$  et  $x - p_V(x)$  sont orthogonaux.

#### 4. Une application: la régression linéaire (droite des moindres carrés).

Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormal, on donne  $n$  points  $M_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \dots, M_n \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$  et une droite affine  $\mathcal{D}$  d'équation cartésienne  $y = ax + b$ .

On projette verticalement les points  $M_i$  sur la droite  $\mathcal{D}$  en des points  $H_i \begin{pmatrix} x_i \\ ax_i + b \end{pmatrix}$ .

On suppose que les points  $M_i$  n'ont pas tous la même abscisse. L'objectif est de déterminer la droite  $\mathcal{D}$  de façon que la somme  $\delta(a, b) = \sum_{i=1}^n M_i H_i^2$  soit minimale.

Pour formaliser cette recherche en termes de projection orthogonale sur un sous-espace d'un espace euclidien, on se place maintenant dans l'espace  $E = \mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire canonique noté  $(\cdot | \cdot)$  et de la norme associée notée  $\|\cdot\|$ , et on introduit les vecteurs  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$  et  $\vec{u} = (1, \dots, 1)$ . On introduit enfin les nombres

$$X = \sum_{i=1}^n x_i, \quad Y = \sum_{i=1}^n y_i, \quad R = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad S = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad T = \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

On observe tout d'abord que  $\delta(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2 = \|\vec{y} - (a\vec{x} + b\vec{u})\|^2$ .

Lorsque le couple  $(a, b)$  décrit  $\mathbb{R}^2$ , le vecteur  $a\vec{x} + b\vec{u}$  décrit le plan  $P = \text{Vect}(\vec{x}, \vec{u})$  engendré par les vecteurs  $\vec{x}$  et  $\vec{u}$ . C'est bien un plan car, les  $x_i$  n'étant pas tous égaux par hypothèse, les vecteurs  $\vec{x}$  et  $\vec{u}$  de  $\mathbb{R}^n$  ne sont pas colinéaires. On sait que, lorsqu'un vecteur  $\vec{z}$  décrit le plan  $P$ , la distance  $d(\vec{y}, \vec{z}) = \|\vec{y} - \vec{z}\|$  est minimale lorsque  $\vec{z}$  est le projeté orthogonal du vecteur  $\vec{y}$  sur le plan  $P$ . Or, un vecteur  $\vec{z} = a\vec{x} + b\vec{u}$  de  $P$  est le projeté orthogonal de  $\vec{y}$  sur  $P$  si et seulement si  $\vec{y} - \vec{z} \in P^\perp$ , c'est-à-dire si et seulement si le vecteur  $\vec{y} - \vec{z}$  est orthogonal aux deux vecteurs  $\vec{x}$  et  $\vec{u}$  qui engendrent le plan  $P$ , autrement dit si et seulement si les deux produits scalaires  $(\vec{y} - (a\vec{x} + b\vec{u}) | \vec{x})$  et  $(\vec{y} - (a\vec{x} + b\vec{u}) | \vec{u})$  sont nuls.

En développant les produits scalaires par linéarité à gauche, on obtient les deux équations permettant d'obtenir  $a$  et  $b$  pour que  $\delta(a, b)$  soit minimal:

$$\begin{cases} \|\vec{x}\|^2 a + (\vec{u} | \vec{x}) b = (\vec{x} | \vec{y}) \\ (\vec{x} | \vec{u}) a + \|\vec{u}\|^2 b = (\vec{u} | \vec{y}) \end{cases}, \quad \text{soit} \quad \begin{cases} R a + X b = S \\ X a + n b = Y \end{cases}.$$

Le déterminant de ce système est non nul puisque, par Cauchy-Schwarz,

$$nR - X^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{x}\|^2 - (\vec{u} | \vec{x})^2 \geq 0$$

et l'inégalité est stricte puisque les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{x}$  sont non colinéaires. On a donc un système de Cramer, admettant une unique solution. La résolution fournit les formules

$$a = \frac{nS - XY}{nR - X^2} \quad \text{et} \quad b = \frac{RY - SX}{nR - X^2}.$$

## V. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Il s'agit ici, dans un espace préhilbertien, d'orthonormaliser une famille libre, c'est-à-dire de construire une famille orthonormale vérifiant certaines conditions. On va prouver l'unicité de cette construction, et donner pour cela un procédé algorithmique. Énonçons donc le

**Théorème de Gram-Schmidt.** Soit  $E$  un espace préhilbertien, soit  $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)$  une famille libre finie de vecteurs de  $E$ , de cardinal  $n$ . Alors il existe une unique famille  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $n$  vecteurs de  $E$  telle que:

- (C1): la famille  $\mathcal{E}$  est orthonormale ;
- (C2): pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_k)$  ;
- (C3): pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $(e_k | x_k) > 0$ .

**Définition.** Cette famille  $\mathcal{E}$  est appelée l'orthonormalisée de la famille  $\mathcal{X}$ .

*Preuve de l'existence.* Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on posera  $V_k = \text{Vect}(x_1, \dots, x_k)$ . Comme la famille  $(x_1, \dots, x_k)$  est libre et de cardinal  $k$ , on a  $\dim(V_k) = k$ .

On construit les vecteurs  $e_k$ , avec  $1 \leq k \leq n$ , de la façon suivante:

- on pose d'abord  $v_1 = x_1$  et  $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{x_1}{\|x_1\|}$  ;
- pour  $k$  de 2 à  $n$ , on note  $v_k$  la différence entre  $x_k$  et son projeté orthogonal sur  $V_{k-1}$ , soit  $v_k = x_k - p_{V_{k-1}}(x_k)$ , puis on "norme" ce vecteur  $v_k$  en introduisant  $e_k = \frac{v_k}{\|v_k\|}$ .

Tout d'abord ceci a bien un sens: en effet, le vecteur  $x_1$  est non nul puisqu'il est extrait d'une famille libre ; ensuite, pour tout  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ , le vecteur  $v_k$  est non nul car s'il était nul cela signifierait que  $x_k \in V_{k-1}$  et la famille  $(x_1, \dots, x_k)$  serait liée ce qui est absurde.

Les vecteurs  $e_k$  sont tous unitaires par construction et, pour  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ , on a  $v_k \in V_{k-1}^\perp$  par construction. Il est par ailleurs immédiat que  $v_k \in V_k$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Donc, si  $1 \leq i < j \leq n$ , les vecteurs  $v_i$  et  $v_j$  sont orthogonaux car  $v_i \in V_i$  alors que  $v_j \in V_{j-1}^\perp \subset V_i^\perp$ , cette inclusion résultant de l'inclusion  $V_i \subset V_{j-1}$  car  $i \leq j-1$ . La famille  $(v_1, \dots, v_n)$  est donc orthogonale, et la famille  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  est orthonormale.

On a vu que, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $e_k \in V_k$ , d'où immédiatement  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \subset V_k$ . La famille  $(e_1, \dots, e_k)$  étant libre car orthonormale, les sous-espaces  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$  et  $V_k = \text{Vect}(x_1, \dots, x_k)$  sont tous deux de dimension  $k$ , donc ils sont égaux.

Enfin,  $(e_1 | x_1) = \|x_1\| > 0$  et, pour tout  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ , en posant  $w_k = p_{V_{k-1}}(x_k)$ , on a  $x_k = v_k + w_k$ , les deux vecteurs étant orthogonaux, donc

$$(v_k | x_k) = (v_k | v_k + w_k) = \|v_k\|^2 > 0 ,$$

l'inégalité étant stricte puisque  $x_k \notin V_{k-1}$ , puis  $(e_k | x_k) = \frac{(v_k | x_k)}{\|v_k\|} = \|v_k\| > 0$ .

L'unicité de la famille  $\mathcal{E}$  sera prouvée ultérieurement.

**À retenir. Procédé algorithmique.** On pose d'abord  $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$  puis, pour  $k$  de 2 à  $n$ , on construit d'abord le vecteur  $v_k$  (différence entre  $x_k$  et son projeté orthogonal sur  $V_{k-1}$ ) par  $v_k = x_k - p_{V_{k-1}}(x_k) = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} (e_i | x_k) e_i$ , et on norme enfin ce vecteur:  $e_k = \frac{v_k}{\|v_k\|}$ .

**Conséquence.** Dans un espace euclidien de dimension  $n$ , on dispose d'un procédé permettant de construire une base orthonormale  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  en partant d'une base quelconque  $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)$ . Cette base "orthonormalisée" vérifiera en outre les propriétés

$$(\mathbf{C2}) : \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_k)$$

et

$$(\mathbf{C3}) : \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad (e_k | x_k) > 0 .$$

Si l'on note  $R = P_{\mathcal{E}, \mathcal{X}} = (r_{i,j})$  la matrice de passage de la base orthonormalisée  $\mathcal{E}$  vers la base initiale  $\mathcal{X}$ , on a alors  $x_j = \sum_{i=1}^n r_{i,j} e_i$  pour tout  $j$ . La condition **(C2)** montre que  $x_j \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_j)$  pour tout  $j$ , donc  $r_{i,j}$  est nul dès que  $i > j$ , la matrice  $R$  est donc triangulaire supérieure. D'autre part,  $r_{i,j}$  est la  $i$ -ième coordonnée du vecteur  $x_j$  dans la base orthonormale  $\mathcal{E}$ , donc  $r_{i,j} = (e_i | x_j)$ . La condition **(C3)** montre donc que les coefficients diagonaux  $r_{i,i}$  de  $R$  sont strictement positifs. Notons que  $\det(R) = \prod_{i=1}^n r_{i,i} > 0$ , donc les bases  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{E}$  sont "de même sens", nous y reviendrons.

## VI. Formes linéaires sur un espace euclidien.

### 1. Théorème de représentation de Riesz.

**Théorème.** Soit  $\varphi$  une forme linéaire sur un espace euclidien  $E$ . Alors il existe un unique vecteur  $a$  de  $E$  tel que

$$\forall x \in E \quad \varphi(x) = (a | x) .$$

*Preuve.* Pour tout  $a \in E$ , soit  $\varphi_a : E \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $x \mapsto (a | x)$ . De la linéarité à droite du produit scalaire, il résulte que  $\varphi_a$  est une forme linéaire sur  $E$ , autrement dit  $\varphi_a$  appartient à

$$E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \text{ espace dual de } E. \text{ Considérons maintenant l'application } \Phi : \begin{cases} E \rightarrow E^* \\ a \mapsto \varphi_a \end{cases} .$$

Il résulte maintenant de la linéarité à gauche du produit scalaire que  $\Phi$  est une application linéaire. Elle est injective car, si  $a \in \text{Ker}(\Phi)$ , alors  $\varphi_a$  est la forme linéaire nulle, et en particulier  $\varphi_a(a) = \|a\|^2 = 0$  donc  $a = 0_E$ . Comme  $\Phi$  est linéaire et injective entre deux espaces vectoriels de même dimension finie, elle est donc bijective, c'est un isomorphisme, on a donc

$$\forall \varphi \in E^* \quad \exists ! a \in E \quad \varphi = \Phi(a) = \varphi_a ,$$

et c'est ce que dit l'énoncé du théorème de Riesz.

## 2. Hyperplans d'un espace euclidien. Vecteur normal.

Si  $H$  est un hyperplan d'un espace euclidien  $E$ , alors  $D = H^\perp$  est une droite vectorielle. Tout vecteur **non nul**  $a$  de  $D$  est appelé **vecteur normal** à l'hyperplan  $H$ . On a alors  $H = D^\perp = (\text{Vect}(a))^\perp$ , et  $H = \text{Ker}(\varphi_a)$ , où  $\varphi_a$  est la forme linéaire  $x \mapsto (a|x)$  mentionnée dans le paragraphe précédent. Si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormale de  $E$ , si  $a = \sum_{i=1}^n a_i e_i$  est un vecteur normal à  $H$ , alors une équation cartésienne de l'hyperplan  $H$  relativement à la base  $\mathcal{B}$  est:  $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ , qui traduit l'orthogonalité des vecteurs  $a$  et  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ .

## 3. Distance d'un vecteur à un hyperplan, à une droite.

Soit  $H$  un hyperplan de  $E$  euclidien, soit  $a$  un vecteur normal à  $H$ , soit  $x \in E$ . On a alors  $d(x, H) = \|x - p_H(x)\|$ . Or, le vecteur  $x - p_H(x)$  est orthogonal (ou "normal") à l'hyperplan  $H$ , il est donc colinéaire à  $a$ : il existe  $\lambda$  réel tel que  $x - p_H(x) = \lambda a$ . Ce réel  $\lambda$  est déterminé par le fait que  $x + \lambda a = p_H(x)$  appartient à  $H$ , donc  $(a | x + \lambda a) = 0$ , donc  $\lambda = -\frac{(a|x)}{\|a\|^2}$ .

On a donc  $p_H(x) = x - \frac{(a|x)}{\|a\|^2} a$ , et enfin

$$d(x, H) = \|x - p_H(x)\| = \frac{|(a|x)|}{\|a\|}, \quad \text{avec } a \text{ vecteur normal à } H.$$

**Remarque.** On peut retrouver l'expression de  $p_H(x)$  en observant que  $p_H(x) = x - p_D(x)$ , et le projeté orthogonal de  $x$  sur  $D$  s'exprime par  $p_D(x) = \left( \frac{a}{\|a\|} \mid x \right) \frac{a}{\|a\|} = \frac{(a|x)}{\|a\|^2} a$ , puisque  $\left( \frac{a}{\|a\|} \right)$  est une base orthonormale de la droite  $D$ . Donc

$$p_H(x) = x - \frac{(a|x)}{\|a\|^2} a.$$

Puis, par la relation de Pythagore,  $d(x, D)^2 = \|x\|^2 - d(x, H)^2 = \|x\|^2 - \frac{(a|x)^2}{\|a\|^2}$ .

Si l'hyperplan  $H$  a pour équation cartésienne  $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$  dans une base orthonormale  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ , si  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ , alors  $a = \sum_{i=1}^n a_i e_i$  est un vecteur normal à  $H$ , et on obtient

$$d(x, H) = \frac{|a_1 x_1 + \dots + a_n x_n|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}}.$$