DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES numéro 5, sujet A
COMMENTAIRES
PSI2 2025-2026

EXERCICE

2. Quelques erreurs de la part de personnes qui devraient sans doute revoir urgemment les probabilités, comme par exemple l'égalité $P(X_1^2 = k) = \big(P(X_1 = k)\big)^2$ qui est assez étonnante!

3. Cette question demande un peu de formalisation (intersection d'événements, expliquer où intervient l'indépendance des variables X_j).

5. ERRATUM dans le corrigé papier**:** L'équivalent demandé est $\mathrm{E}(U_k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{k+1}$.

PROBLÈME

C'est un problème construit en s'appuyant sur un sujet de Centrale et proposant une initiation à la théorie des distributions. Cette théorie a été formalisée par le mathématicien français Laurent Schwartz (avec un “t”, ce n'est donc pas celui de Cauchy-Schwarz) pour généraliser la notion de fonction dans les applications à la physique. Vous avez sans doute déjà entendu dire “un Dirac” en physique ou en SII, eh bien ce n'est pas véritablement une fonction (qui devrait alors prendre une valeur infinie en un point ?). Cet objet, correspondant plus ou moins à l'idée d'une masse unité se concentrant en un point, peut être considéré comme une distribution. On peut l'approcher “au sens des distributions” par une suite de fonctions formant un pic dont la hauteur est de plus en plus grande et la largeur de plus en plus petite, l'aire sous la courbe restant constante égale à 1, c'est la question **14.a.** du problème.

Bien sûr, ce sujet, même s'il comporte de nombreuses questions sans trop de technicité, nécessite de se familiariser rapidement avec des notions nouvelles et peut-être un peu abstraites. C'était donc un sujet difficile.

1.b. Levez la main, celles et ceux qui ne savent pas dériver $P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)$... Ah oui, ça fait du monde! En deuxième année de prépa, il serait bien de ne pas se planter systématiquement quand on dérive une fonction composée! Et interdisez-vous la notation $P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)'$ qui est ambigüe!

Je crois qu'il était nécessaire dans cette question de rédiger une récurrence. Ceux qui ont voulu éviter de rédiger une récurrence ne produisent rien de très convaincant.

1.c. Il ne faut pas se contenter de répondre “par croissances comparées”, c'est trop facile! Ce qui est connu, ce sont les croissances comparées des fonctions polynomiales et exponentielles en $+\infty$, soit le fait que $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} X^n e^{-X} = 0$, on s'y ramène donc en posant $X = \dfrac{1}{x}$, à rédiger!

1.d. Il ne s'agit pas ici de “prolonger par continuité” quoi que ce soit, mais de prouver la dérivabilité (notamment en 0) de ψ, puis de ψ', $\cdots$, puis de $\psi^{(n)}$ pour tout n par récurrence. Le matériel à utiliser est le **théorème de la limite de la dérivée** (**TLD**) qui semble avoir été largement oublié.

2. Question demandant une prise d'initiative, les réponses les plus naturelles étant de proposer $\varphi : x \mapsto \psi(1-x^2)$, ou bien $\varphi : x \mapsto \psi(1-x)\,\psi(1+x)$. Plusieurs d'entre vous proposent des fonctions φ qui ont manifestement des discontinuités (en 0, ou en 1, ou en -1)!

3. Je n'ai pas trop détaillé cela dans le corrigé, mais il est assez immédiat qu'on a l'inclusion $\text{supp}(\alpha f + g) \subset \text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)$. Oui, une réunion! J'ai vu une intersection dans plusieurs copies ce qui est manifestement faux.

Cela n'a pas souvent été rédigé mais, si φ est dérivable, on a aussi $\text{supp}(\varphi') \subset \text{supp}(\varphi)$. *Il est en fait facile de montrer que, si $x \notin \text{supp}(\varphi)$, alors $x \notin \text{supp}(\varphi')$.*

4.a. Une application du **théorème de stricte positivité** (**TSP**) où la mention de la continuité a encore trop souvent été oubliée.

4.c.i. Deux réponses à peu près correctes pour cette question très technique, la domination étant peu commode à trouver.

5. ERRATUM dans le corrigé papier**:** $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n(x)\ \varphi(x)\ \mathrm{d}x = \pi\ \varphi(0)$. Du coup, à la question **13.**, $\lim\limits_{n\to+\infty} T_{\alpha_n} = \pi\ \delta_0$.

6. Ici le changement de variable $t = nx$ est fort peu judicieux!

9. La convergence uniforme de (φ_n) vers φ, qui résulte de la "convergence forte", a rarement été correctement exploitée. Beaucoup d'entre vous essaient d'utiliser le théorème de convergence dominée (*ce qui est possible, même si ce n'est pas la meilleure idée*) mais, comme son nom l'indique, il faut alors "dominer"! Et c'est là que ça coince! En effet, les fonctions φ_n étant continues à support borné, elles sont elles-mêmes bornées, mais il faudrait une "borne" M **indépendante de l'entier** n... ce que l'on peut obtenir si l'on sait exploiter la convergence uniforme de (φ_n) vers φ.

11.d. Oops! Petite coquille dans l'énoncé: la fonction de Heaviside, que vous avez peut-être déjà rencontrée, vaut 1 sur $\mathbb{R}_+$, et non pas x. Désolé!

14. Pour la culture, comme je le mentionnais en introduction, voici la question qui donne la meilleure image de ce que les physiciens ou "SI-istes" ont coutume d'appeler "un Dirac".

15. C'est une généralisation de la question précédente, la suite de fonctions (U_n) est ce que les mathématiciens appellent une "approximation de l'unité", cela permet encore de construire une suite de distributions convergeant vers un Dirac.

Pour la culture, la question **4.** introduit une "suite régularisante" (ρ_n), c'est encore et toujours la même idée d'une aire sous la courbe constante égale à 1 mais qui se concentre au voisinage de l'origine. Ici, les fonctions ρ_n sont de plus de classe $\mathcal{C}^\infty$, et la question **4.c.ii.** montre que toute fonction lipschitzienne (en fait c'est vrai pour toute fonction continue sur $\mathbb{R}$) peut être approchée uniformément par des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, en opérant un produit de convolution.