Notion de probabilité. Espaces probabilisés.

1. Un animal erre entre trois points d'eau A, B, C. À l'instant $t = 0$, il est au point A. Si, à l'instant n, il est en l'un des trois points A, B ou C, il en part alors et sera à l'instant $n+1$ de façon équiprobable en l'un des deux autres points d'eau. Pour n entier naturel, on note a_n la probabilité pour que l'animal soit au point A à l'instant n. On définit de même b_n et c_n.

a. Exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

b. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'elle est diagonalisable et, en moins d'une minute, trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

c. Exprimer a_n, b_n, c_n en fonction de n.

2. On effectue une suite de lancers indépendants d'une pièce de monnaie. La probabilité d'obtenir "Face" à chaque lancer est $p \in]0, 1[$.

Pour tout $n \geq 1$, on considère l'événement U_n: "on obtient deux Face de suite, pour la première fois, aux lancers numéros n et $n + 1$", et on pose $u_n = P(U_n)$.

Notons r_n la probabilité qu'au cours des n premiers lancers, on ait obtenu au moins une fois deux Face consécutifs. Exprimer r_n en fonction des u_k. On considère aussi l'événement

E_n: "il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que l'on ait obtenu Face aux lancers numéros $2k - 1$ et $2k$".

Montrer que $P(E_n) = 1 - (1 - p^2)^n$. Montrer que $P(E_n) \leq r_{2n}$. En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$. Interpréter.

3*. Problème de la ruine du joueur. Deux joueurs A et B s'affrontent en des parties indépendantes. Le joueur A dispose d'une fortune égale à n brouzoufs tandis que le joueur B dispose de $N-n$ brouzoufs. À chaque tour, le joueur A a la probabilité $p \in]0, 1[$ de l'emporter et le joueur B a la probabilité complémentaire $q = 1 - p$. Le joueur perdant cède alors un brouzouf au vainqueur. Le jeu continue jusqu'à la ruine d'un des deux joueurs. On note a_n la probabilité que le joueur A l'emporte lorsque sa fortune initiale vaut n.

a. Que valent a_0 et a_N ? Établir la formule de récurrence

$$\forall n \in [\![1, N - 1]\!] \qquad a_n = p\, a_{n+1} + q\, a_{n-1} \; .$$

b. En déduire que la suite $(u_n)_{1 \leq n \leq N}$ définie par $u_n = a_n - a_{n-1}$ est géométrique.

c. Calculer a_n en distinguant les cas $p = q$ et $p \neq q$.

d. Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement.

4. Soit (A_n) une suite d'événements sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On pose $S = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \right)$.

a. Montrer que S est un événement, i.e. $S \in \mathcal{A}$, et qu'il est réalisé si et seulement si une infinité des événements A_n sont réalisés.

b. Dans cette question et la suivante, on considère une suite infinie de lancers indépendants d'une pièce, la probabilité d'obtenir "Pile" à chaque lancer étant $p \in]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'événement A_n : "au cours des $2n$ premiers lancers, on obtient autant de Pile que de Face". Calculer $P(A_n)$ pour tout n.

c. Montrer que, pour tout n entier naturel, on a $\dbinom{2n}{n} \leq 4^n$. En déduire que, si $p \neq \dfrac{1}{2}$, la série $\sum_{n \geq 0} P(A_n)$ converge. Montrer alors que $P(S) = 0$.

5*. Soit (A_n) une suite d'événements mutuellement indépendants. Montrer que la probabilité qu'aucun des événements A_n ne soit réalisé est majorée par $M = \exp\Big(-\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)\Big)$.

On pourra utiliser l'inégalité $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 - x \leq e^{-x}$.

Variables aléatoires discrètes.

6. Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent des lois géométriques $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(q)$ respectivement. Calculer $P(X < Y)$.

7. Calculer $\mathrm{E}\Big(\dfrac{1}{X+1}\Big)$ si X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

8. Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent des lois géométriques $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(q)$ respectivement. Quelle est la probabilité que la matrice $A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

9. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$. On considère N variables aléatoires $X_1, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

a. Soit $i \in [\![1, N]\!]$, soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $P(X_i \leq n)$, puis $P(X_i > n)$.

b. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leq i \leq N} X_i$, c'est-à-dire

$$\forall \omega \in \Omega \qquad Y(\omega) = \min\big\{X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega)\big\} .$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(Y > n)$. En déduire $P(Y \leq n)$, puis $P(Y = n)$.

c. Reconnaître la loi de Y. En déduire $\mathrm{E}(Y)$.

10. Lors d'une rencontre d'athlétisme, la barre est montée d'un cran après chaque saut réussi par le concurrent. La compétition s'arrête pour le sauteur au premier saut raté. Pour le saut numéro n, l'athlète a une chance sur n de passer la barre. On note X le rang du dernier saut réussi.

Quelle est la loi de X? Montrer que X^2 est d'espérance finie, calculer l'espérance et la variance de X.

11. On considère un détecteur de particules ayant une probabilité de détection de chaque particule ègale à $p \in]0,1[$. On note N et S les variables aléatoires qui comptent respectivement le nombre de particules arrivant sur le capteur et le nombre de particules détectées. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ.

a. Soient s et n entiers naturels. Calculer $P(S = s | N = n)$, puis $P(S = s, N = n)$. En déduire la loi de S.

b. Sans calcul, donner la loi de $N - S$.

c. Les variables S et $N - S$ sont-elles indépendantes ?

d. Les variables N et S sont-elles indépendantes ?

12. Une urne contient trois boules numérotées 1, 2, 3. On tire avec remise une boule dans cette urne, on note X le nombre de tirages nécessaires pour voir apparaître les trois numéros. On note A le rang d'apparition du premier 1, B celui du premier 2, C celui du premier 3.

a. Exprimer l'événement $\{X > n\}$ en fonction de A, B et C. Calculer $P(X > n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Calculer $P(X = n)$, puis $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n)$. Interpréter.

c. Calculer $\mathrm{E}(X)$.

13. X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Elles suivent la même loi définie par:

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad P(X = k) = P(Y = k) = pq^k \ ,$$

où $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. On considère alors les variables U et V définies par $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$.

a. Déterminer la loi du couple $S = (U, V)$.

b. Déterminer les lois marginales de U et de V.

c. Vérifier que $W = V + 1$ suit une loi géométrique. En déduire l'espérance de V.

d. Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

14. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et que, pour tout n, la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = n\}$ est binomiale de paramètres n et p, avec $p \in]0, 1[$.

a. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).

b. Reconnaître la loi de Y.

15.a. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

b. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$. Prouver que :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \qquad P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathrm{E}(Y_1)\right| \geq a\right) \leq \frac{\mathrm{V}(Y_1)}{n\, a^2} \ .$$

c. **Application** : On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0,35 et 0,45 ? *Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du i-ème tirage.*

16. On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et que, à chaque lancer, la pièce donne pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et face avec la probabilité $1-p$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux "pile" consécutifs. Par exemple, pour la suite de lancers PFFPFPPFFF..., on a $X = 7$. Pour tout n entier naturel non nul, on nomme P_n l'événement: "le n-ième lancer donne pile" et $F_n = \overline{P_n}$ l'événement: "le n-ième lancer donne face"

a. Pour tout n entier naturel, on note A_n l'événement: "on obtient pile aux lancers $2n+1$ et $2n+2$". Calculer $P(A_n)$ et $P\Big(\bigcap_{k=0}^{n-1} \overline{A_k}\Big)$. En déduire $P\Big(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}\Big)$, puis $P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big)$.

b. Pour tout n, on note E_n l'événement: "on n'a pas obtenu deux pile consécutifs lors des n premiers lancers". Montrer que, pour $n \geq 3$, on a

$$P(X = n) = p^2(1-p)\, P(E_{n-3}) \, .$$

c. En utilisant la relation $\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$, calculer le temps d'attente moyen de deux "pile" consécutifs.

17. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi, à valeurs dans $\mathbb{N}$, soit $Z = X + Y$. On suppose que $Z \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

a. Espérance et variance de X ? **b.** Fonction génératrice de X ? **c.** Loi de X ?

d. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la loi conditionnelle de X sachant $\{Z = n\}$?

18. Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(T > n) > 0$. On appelle **taux de panne** associé à T la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\theta_n = P(T = n \,|\, T \geq n) \, .$$

Typiquement, si T est la variable aléatoire indiquant l'instant où un matériel tombe en panne, la quantité θ_n indique la probabilité qu'il tombe en panne à l'instant n sachant qu'il était encore fonctionnel jusque là.

a. Montrer que $\theta_n \in [0,1[$ pour tout n.

b. Exprimer $P(T \geq n)$ à l'aide des θ_k. En déduire que la série $\sum \theta_k$ diverge.

c*. Inversement, soit (θ_n) une suite d'éléments de $[0,1[$ telle que la série $\sum \theta_n$ diverge. Montrer que la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un taux de panne associé à une certaine variable aléatoire T.

19. Soient $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes de variance finie. On appelle **matrice des covariances** de la famille $(X_1, \cdots, X_n)$ la matrice carrée d'ordre n:

$$S = \big(\mathrm{Cov}(X_i, X_j)\big)_{1\leq i,j\leq n} \, .$$

a. Soient $a_1, \cdots, a_n$ des réels. Exprimer la variance de $X = a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$ à l'aide de la matrice S.

b. Montrer que $\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+$.

20*. Pour tout réel x tel que $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. On considère une variable aléatoire X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui suit la **loi zéta de paramètre** x, c'est-à-dire telle que

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(X = n) = \frac{1}{n^x\,\zeta(x)}\ .$$

a. Vérifier la cohérence de cette définition.

b. Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité de l'événement $\{a \mid X\}$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le n-ième nombre premier, ainsi $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $\cdots$ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les événements $\{p_k \mid X\}$, $1 \leq k \leq n$, sont mutuellement indépendants.

d. Montrer que $\{X = 1\} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{\{p_k \mid X\}}$.

e. En déduire la (jolie) relation $\frac{1}{\zeta(x)} = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right)$.

21*. Inégalité de Paley-Zygmund.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on suppose que X^2 est d'espérance finie. Prouver la relation

$$\forall t \in]0,1[\qquad P\big(X \geq t\,\mathrm{E}(X)\big) \geq (1-t)^2\,\frac{\mathrm{E}(X)^2}{\mathrm{E}(X^2)}\ .$$

Si on considère l'événement $A = \big\{X \geq t\,\mathrm{E}(X)\big\}$*, on pourra commencer par écrire* $X = X \cdot \mathbb{1}_A + X \cdot \mathbb{1}_{\overline{A}}$*, où* $\mathbb{1}_A$ *est la variable indicatrice de l'événement* A*.*

Fonctions génératrices.

22. On considère deux dés que l'on lance indépendamment. Montrer qu'il est impossible de truquer les dés de façon que la somme des résultats affichés sur leur face supérieure suive une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$. *On pourra utiliser la fonction génératrice de la loi de la somme des résultats affichés.*

23. La loi binomiale négative. On procède à une suite de répétitions indépendantes d'une expérience à deux issues: "succès" avec probabilité p, "échec" avec probablité $q = 1 - p$.

a. Soit X_2 la variable aléatoire égale au nombre de répétitions nécessaires pour obtenir deux succès. Donner la loi de X_2, et calculer son espérance.

b. Montrer, pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1, 1[$, la relation $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.

c. Généralisation du **a.**: Soit k un entier naturel non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au temps d'attente du k-ième succès. Donner la loi de X_k et calculer son espérance.

d. Déterminer la fonction génératrice G_{X_k} de la variable X_k et son intervalle de convergence.

e. Retrouver ainsi l'espérance $\mathrm{E}(X_k)$. Calculer la variance $\mathrm{V}(X_k)$.

24. On note X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On se donne une suite $(X_i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même loi que X. Soit d'autre part N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, que l'on suppose indépendante des X_i. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$T(\omega) = \prod_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega) \ .$$

On conviendra que $T(\omega) = 1$ si $N(\omega) = 0$.

On suppose que X est d'espérance finie notée m. En utilisant la fonction génératrice G_N de la variable N, donner une condition nécessaire et suffisante pour que T soit d'espérance finie, et exprimer dans ce cas $\mathrm{E}(T)$. Étudier le cas particulier où N et X sont des variables de Poisson.

25. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit sa **fonction caractéristique** Φ_X par $\Phi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX})$ pour tout t réel.

a. Montrer que Φ_X est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer l'intégrale $I_k = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_X(t)\, e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$. Que dire de deux variables aléatoires X et Y, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que $\Phi_X = \Phi_Y$?

c. On suppose que X est d'espérance finie. Montrer que la fonction Φ_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer $\Phi'_X(0)$.

26. Une urne contient trois boules blanches, numérotées 1, 2, 3, ainsi que k boules noires ($k \in \mathbb{N}^*$). On effectue dans l'urne des tirages avec remise.

a. Soit X_1 la variable aléatoire donnant le numéro de la première boule blanche tirée. Quelle est la loi de X_1 ? Déterminer sa fonction génératrice.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue des tirages avec remise dans l'urne jusqu'à obtention de n boules blanches dont on note les numéros. On note S_n la variable aléatoire donnant la somme des numéros des boules blanches obtenues. Quelle est la fonction génératrice de S_n ? Donner son espérance et sa variance.

c. Soit r un entier naturel non nul. On effectue r tirages avec remise dans l'urne, on note N le nombre de boules blanches obtenues. On définit alors une variable aléatoire S par $\begin{cases} S = 0 & \text{si} \quad N = 0 \\ S = S_n & \text{si} \quad N = n \ (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$. Calculer la fonction génératrice de S.

Exercices avec Python.

27. Une pièce a la probabilité $p \in]0,1[$ de tomber sur pile. On la lance jusqu'à avoir obtenu deux fois pile, et on note X le nombre de fois où elle est tombée sur "face".

a. Loi de X. Montrer que X est d'espérance finie et calculer $\mathrm{E}(X)$.

Lorsque $X = n$, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne, et on en tire une au hasard. On note Y le numéro de la boule tirée.

b. Utiliser Python pour simuler cette expérience aléatoire.

c. Loi de Y. Calculer $\mathrm{E}(Y)$.