CORRIGÉ du DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 7
PSI2 2025-2026

PROBLÈME 1

d'après CCP, 2018, filière PC

PARTIE A.

Les polynômes L_n sont appelés **polynômes de Legendre**.

1. On a $U_0 = 1$ donc $L_0 = 1$, puis $U_1 = X^2 - 1$ donc $L_1 = X$. Ensuite, $U_2 = (X^2-1)^2$ et
$$L_2 = \frac{1}{8}\,U_2'' = \frac{1}{2}\,(3X^2 - 1)\ .$$

2. Le polynôme U_n est de degré $2n$, et chaque dérivation abaisse le degré d'une unité, donc $\deg(L_n) = n$ pour tout n. Le coefficient dominant de L_n est
$$a_n = \frac{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)}{2^n\ n!} = \frac{(2n)!}{2^n\ (n!)^2}\ .$$

3. Les polynômes L_k sont étagés en degrés, donc $(L_0, \cdots, L_n)$ est une famille libre dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. Son cardinal est égal à la dimension $(n+1)$ de $\mathbb{R}_n[X]$, c'est donc une base.

4. La linéarité de φ est immédiate,et résulte de la linéarité de la dérivation des polynômes.

5. Si $\deg(P) \leq n$, alors clairement $\deg\big(\varphi(P)\big) \leq n$, donc le sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ.

6. On calcule les $\varphi_n(X^k) = \varphi(X^k)$ pour k de 0 à n: d'abord, $\varphi(X^0) = \varphi(1) = 0$, puis $\varphi(X) = 2X$ puis, pour $k \geq 2$,
$$\varphi(X^k) = (X^2-1)\,k(k-1)X^{k-2} + 2X\,kX^{k-1} = k(k+1)\,X^k - k(k-1)\,X^{k-2}\ .$$
Donc, si $\mathcal{B}_n = (1, X, \cdots, X^n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$,
$$M_n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_n}(\varphi_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & & & (0) \\ & 2 & 0 & -6 & & \\ & & 6 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ & & & & \ddots & 0 \\ (0) & & & & & n(n+1) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})\ .$$

7. La matrice M_n est triangulaire supérieure. On observe alors que
$$\mathrm{Sp}(\varphi_n) = \mathrm{Sp}(M_n) = \big\{0, 2, 6, \cdots, n(n+1)\big\} = \big\{k(k+1)\ ;\ 0 \leq k \leq n\big\}\ .$$
Comme φ_n admet $n+1$ valeurs propres distinctes, avec $\dim\big(\mathbb{R}_n[X]\big) = n+1$, on conclut que φ_n est diagonalisable.

8. Calcul banal, laissé au lecteur.

9. Par la formule de Leibniz,
$$(X\,U_k)^{(k+1)} = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j}\ X^{(j)}\,U_k^{(k+1-j)} = X\,U_k^{(k+1)} + (k+1)\,U_k^{(k)}$$
puisque les dérivées d'ordre ≥ 2 du polynôme X sont nulles. Par un calcul semblable,
$$\begin{aligned} \big((X^2-1)\,U_k'\big)^{(k+1)} &= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j}\ (X^2-1)^{(j)}\,U_k^{(k+2-j)} \\ &= (X^2-1)\,U_k^{(k+2)} + 2(k+1)\,X\,U_k^{(k+1)} + k(k+1)\,U_k^{(k)}\ . \end{aligned}$$
Après regroupement des termes et simplification, en dérivant $k+1$ fois la relation obtenue à la question précédente, on obtient

$$(X^2-1)\,U_k^{(k+2)}+2X\,U_k^{(k+1)}-k(k+1)\,U_k^{(k)}=0\;.$$

10. On calcule. Zou, c'est parti!

$$\begin{aligned}\varphi_n(L_k) &= (X^2-1)\,L_k''+2X\,L_k' \\ &= \frac{1}{2^k\,k!}\Big((X^2-1)\,U_k^{(k+2)}+2X\,U_k^{(k+1)}\Big) \\ &= \frac{1}{2^k\,k!}\,k(k+1)\,U_k^{(k)}\;=\;k(k+1)\,L_k\;.\end{aligned}$$

Donc L_k est vecteur propre de φ_n pour la valeur propre $k(k+1)$.

11. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $\mathrm{Sp}(\varphi_n)=\big\{k(k+1)\;;\;0\le k\le n\big\}$ et, pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, le sous-espace propre associé $E_{k(k+1)}(\varphi_n)$ est la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(L_k)$.

12. Soit V l'ensemble des valeurs propres de φ. Clairement, $\mathrm{Sp}(\varphi_n)\subset V$ pour tout n, donc l'ensemble V (*qu'il serait incorrect d'appeler spectre car on est en dimension infinie*) contient $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Sp}(\varphi_n)=\big\{k(k+1)\;;\;k\in\mathbb{N}\big\}$. Réciproquement, si $\lambda\in V$, si $P\in\mathbb{R}[X]$ est un vecteur propre associé ($P\neq 0$ et $\varphi(P)=\lambda P$), alors P a un certain degré d et on a $\varphi_d(P)=\lambda P$, donc $\lambda\in\mathrm{Sp}(\varphi_d)$. En conclusion, $V=\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{Sp}(\varphi_n)=\big\{k(k+1)\;;\;k\in\mathbb{N}\big\}$.

Pour tout k entier naturel, $E_{k(k+1)}(\varphi)=\mathrm{Vect}(L_k)$.

PARTIE B.

13. On reconnaît dans l'expression de $\varphi(P)(t)$ la dérivée d'un produit, une hipépé donne donc

$$\big(\varphi(P)|Q\big)=\int_{-1}^{1}\big((t^2-1)\,P''(t)+2t\,P'(t)\big)\,Q(t)\,\mathrm{d}t=-\int_{-1}^{1}(t^2-1)\,P'(t)\,Q'(t)\,\mathrm{d}t\;.$$

Le "terme entre crochets", qui est nul, n'a pas été écrit. Comme on obtient une expression faisant jouer à P et Q des rôles symétriques, ceci est aussi égal à $\big(P|\varphi(Q)\big)$. Ainsi, φ est un endomorphisme symétrique de l'espace préhilbertien $\big(E,(\cdot|\cdot)\big)$.

14. Si m et n sont deux entiers naturels distincts, on a

$$\big(\varphi(L_m)|L_n\big)=\big(m(m+1)L_m|L_n\big)=m(m+1)\,(L_m|L_n)\;,$$

mézôssi, "par symétrie",

$$\big(\varphi(L_m)|L_n\big)=\big(L_m|\varphi(L_n)\big)=\big(L_m|n(n+1)L_n\big)=n(n+1)\,(L_m|L_n)\;.$$

Comme $m(m+1)\neq n(n+1)$, en comparant les deux expressions, on a $(L_m|L_n)=0$.

Remarque. Si on pose $Q_n=\dfrac{L_n}{\|L_n\|_2}$, la famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une famille orthonormale dans $\mathbb{R}[X]$ et, plus précisément, puisque chaque Q_k est de degré k, on peut affirmer que, pour tout n, $(Q_0,\cdots,Q_n)$ est une base orthonormale du sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$.

15. C'est du cours. Le polynôme T_n considéré est le projeté orthogonal de f sur le sous-espace de dimension finie $\mathbb{R}_n[X]$. En effet, si Q est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, alors $f-T_n\in\big(\mathbb{R}_n[X]\big)^{\perp}$, $T_n-Q\in\mathbb{R}_n[X]$, ces deux polynômes sont donc orthogonaux et la relation de Pythagore donne

$$\|f-Q\|_2^2 = \big\|(f-T_n)+(T_n-Q)\big\|_2^2 = \|f-T_n\|_2^2 + \|T_n-Q\|_2^2 \geq \|f-T_n\|_2^2\ ,$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si $Q = T_n$ (d'où l'unicité du polynôme T_n recherché).

16. Toujours d'après le cours, le polynôme T_n se décompose dans la base orthonormale $(Q_0, \cdots, Q_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ en $T_n = \sum_{k=0}^{n} (Q_k|f)\, Q_k = \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\, Q_k$. Donc $\|T_n\|_2^2 = \sum_{k=0}^{n} c_k(f)^2$ et, toujours par Pythagore (puisque $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $f - T_n \in \big(\mathbb{R}_n[X]\big)^{\perp}$):

$$d_2\big(f, \mathbb{R}_n[X]\big)^2 = \|f-T_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|T_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k(f)^2\ .$$

17. On déduit de cela que, pour tout n entier naturel, $\sum_{k=0}^{n} c_k(f)^2 \leq \|f\|_2^2$. La série $\sum c_k(f)^2$ converge donc (série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées) et, en faisant tendre n vers l'infini dans cette inégalité, on obtient $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(f)^2 \leq \|f\|_2^2$.

18. Soit $f \in E$, soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite (P_k) de polynômes telle que $\lim_{k\to+\infty} \|f - P_k\|_\infty = 0$. Il existe donc au moins un entier K pour lequel $\|f - P_K\|_\infty \leq \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Alors $\|f - P_K\|_2 \leq \varepsilon$. *Il est en effet facile de voir que, pour tout $g \in E$, on a $\|g\|_2 \leq \sqrt{2}\,\|g\|_\infty$.* Si N est le degré de ce polynôme P_K, comme $P_K \in \mathbb{R}_N[X]$, on a

$$d_2\big(f, \mathbb{R}_N[X]\big) = \min_{Q \in \mathbb{R}_N[X]} \|f - Q\|_2 \leq \|f - P_K\|_2 \leq \varepsilon\ .$$

19. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a montré l'existence d'un entier N tel que $d_2\big(f, \mathbb{R}_N[X]\big) \leq \varepsilon$.
Pour tout $n \geq N$, de l'inclusion $\mathbb{R}_N[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$, on déduit que

$$0 \leq d_2\big(f, \mathbb{R}_n[X]\big) \leq d_2\big(f, \mathbb{R}_N[X]\big) \leq \varepsilon\ .$$

On a donc prouvé que $\lim_{n\to+\infty} d_2\big(f, \mathbb{R}_n[X]\big) = 0$, donc que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k(f)^2 = \|f\|_2^2$ d'après **Q 16.**, ce qui donne la relation de Parseval.

20. Si $f \in E$ et $g \in E$, on a

$$\begin{aligned}
4\,(f|g) &= \|f+g\|_2^2 - \|f-g\|_2^2 \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(f+g)^2 - \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(f-g)^2 \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \Big[(Q_k|f+g)^2 - (Q_k|f-g)^2\Big] \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} 4\,(Q_k|f)\,(Q_k|g) \\
&= 4\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(f)\,c_k(g)\ .
\end{aligned}$$

PROBLÈME 2

1.a. La fonction $h : t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est prolongeable par continuité en 0 (par la valeur $\dfrac{1}{2}$), et la majoration $0 \leq h(t) \leq \dfrac{2}{t^2}$ montre qu'elle est un $O\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ au voisinage de $+\infty$, elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'où l'existence de l'intégrale J.

b. La fonction "sinus cardinal" $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est prolongeable par continuité en 0 (par la valeur 1), et l'intégration par parties

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\ ,$$

légitime car $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos(t)}{t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t} = 0$, montre que les intégrales J et K sont de même nature, et ont la même valeur en cas de convergence. D'après l'étude de J ci-dessus, elles sont donc toutes deux convergentes et $J = K$.

2. Les fonctions φ et ψ sont continues sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ et admettent des limites finies en 0 et en $+\infty$. En effet, $\displaystyle\lim_{t\to 0} \psi(t) = \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0} \varphi(t) = \lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = \lim_{t\to+\infty} \psi(t) = 0$. Elles sont donc bornées au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$, i.e. dans un intervalle de la forme $]0, \varepsilon]$ avec $\varepsilon > 0$, et dans un intervalle de la forme $[A, +\infty[$ avec $A > \varepsilon$. Comme elles sont continues, elles sont aussi bornées sur le segment $[\varepsilon, A]$. Finalement, elles sont bornées sur $\mathbb{R}_+^*$, d'où l'existence de bornes supérieures que nous noterons $\|\varphi\|_\infty$ et $\|\psi\|_\infty$.

3.a. Posons $f(x,t) = \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}\, e^{-xt}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$. Appliquons le théorème de continuité:

- pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, l'application partielle $t \mapsto f(x,t)$ est c.p.m. sur $\mathbb{R}_+^*$;
- pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, l'application partielle $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$;
- pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, on a $\big|f(x,t)\big| = f(x,t) \leq \psi(t) = \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ qui est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après **1.a.**, ce qui nous fournit donc une condition de domination valide. Donc $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

b. Avec les mêmes notations qu'en **a.**, on observe de plus que:

- pour tout $t > 0$, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{1-\cos(t)}{t}\, e^{-xt} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \big(1-\cos(t)\big)\, e^{-xt}\ ;$$
- la majoration $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \varphi(t)\, e^{-xt} \leq \|\varphi\|_\infty\, e^{-xt}$ prouve l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$;
- si $S = [a,b]$ est un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, alors on a la domination
$$\forall (x,t) \in S \times \mathbb{R}_+^* \qquad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq 2\, e^{-at}\ ,$$

la fonction $t \mapsto 2e^{-at}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Du théorème de dérivation des intégrales à paramètre, on déduit que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad g'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t}\, e^{-xt}\, \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g''(x) = \int_0^{+\infty} \big(1-\cos(t)\big)\, e^{-xt}\, \mathrm{d}t\ .$$

c. Pour $x > 0$, on a d'abord facilement $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{x}$ et, un peu moins facilement,

$$\int_0^{+\infty} \cos(t) e^{-xt} \mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-x+i)t} \mathrm{d}t\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i}\right]_{t=0}^{t\to+\infty}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{x-i}\right) = \frac{x}{x^2+1}\ .$$

Finalement, $g''(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2+1}$ pour $x > 0$.

d. De **Q2.**, on déduit, pour tout $x \geq 0$, que $\;0 \leq g(x) \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} \|\psi\|_\infty\, e^{-xt}\, \mathrm{d}t = \frac{\|\psi\|_\infty}{x}$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ par encadrement. De même,

$$\forall x > 0 \qquad \big|g'(x)\big| = \left|-\int_0^{+\infty} \varphi(t)\, e^{-xt}\, \mathrm{d}t\right| \leq \int_0^{+\infty} \big|\varphi(t)\big|\, e^{-xt}\, \mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} \|\varphi\|_\infty\, e^{-xt}\, \mathrm{d}t = \frac{\|\varphi\|_\infty}{x}\ ,$$

d'où aussi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g'(x) = 0$ par encadrement.

e. De la question **c.**, on déduit que $\;g'(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + C\;$ sur $\mathbb{R}_+^*$, où C est une constante. Mais $\;\ln(x) - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, la question **d.** donne alors $C = 0$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad g'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\ .$$

f. Calculons!

$$\begin{aligned} \int^x 1 \times \ln(t^2+1)\, \mathrm{d}t &= \Big[t\,\ln(t^2+1)\Big]^x - \int^x \frac{2t^2}{t^2+1}\, \mathrm{d}t \\ &= x\,\ln(x^2+1) - \int^x \left(\frac{2(t^2+1)}{t^2+1} - \frac{2}{t^2+1}\right) \mathrm{d}t \\ &= x\,\ln(x^2+1) - 2x + 2\,\mathrm{Arctan}(x)\ . \end{aligned}$$

C'est, bien sûr, un calcul à une constante additive près.

g. Des questions **e.** et **f.** ci-dessus, on déduit que, sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} g(x) &= x\,\ln(x) - x - \frac{1}{2}\Big(x\,\ln(x^2+1) - 2x + 2\,\mathrm{Arctan}(x)\Big) + D \\ &= -\frac{1}{2}\,x\,\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \mathrm{Arctan}(x) + D\ , \end{aligned}$$

où D est une constante. Mais $\;x\,\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x \cdot \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et, d'autre part, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$, on en déduit que $D = \dfrac{\pi}{2}$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad g(x) = x\,\ln(x) - \frac{1}{2}\,x\,\ln(x^2+1) - \mathrm{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2}\ .$$

h. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc continue à droite en 0, donc

$$K = J = g(0) = \lim_{x \to 0} g(x) = \frac{\pi}{2} \ .$$

4.a. La fonction $\theta : t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Au voisinage de 0, on a

$$\theta(t) \underset{t \to 0}{\sim} \frac{1}{2}\, t^{1-\alpha} = \frac{1}{2}\, \frac{1}{t^{\alpha-1}} \ ,$$

d'où l'intégrabilité en 0 puisque $\alpha - 1 < 1$. La majoration globale

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad 0 \leq \theta(t) \leq \frac{2}{t^{\alpha+1}} \ ,$$

avec $\alpha + 1 > 1$, montre l'intégrabilité en $+\infty$. Ceci prouve la convergence de l'intégrale J_α si $0 < \alpha < 2$.

b. Cette question généralise la question **1.b.** qui étudiait le cas particulier $\alpha = 1$.

Posons $u(t) = 1 - \cos(t)$ et $v(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$ pour $t > 0$. La fonction produit $uv : t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^\alpha}$ ayant des limites finies (nulles) en 0 et en $+\infty$, il est légitime de poser l'intégration par parties suivante:

$$\begin{aligned} K_\alpha &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} u'(t)\, v(t)\, \mathrm{d}t = \big[u(t)\, v(t)\big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u(t)\, v'(t)\, \mathrm{d}t \\ &= \alpha \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\, \mathrm{d}t = \alpha\, J_\alpha \ . \end{aligned}$$

La convergence de l'intégrale J_α ayant été démontrée, on en déduit la convergence de l'intégrale K_α et la relation $K_\alpha = \alpha\, J_\alpha$.

5.a. L'application $t \mapsto t^n$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante de $]0, +\infty[$ vers lui-même. On peut donc "transformer" l'intégrale généralisée I_n par le changement de variable $u = t^n$ sans changer sa nature. Plus précisément, cela revient à poser $t = u^{\frac{1}{n}}$, donc $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{n}\, u^{\frac{1}{n}-1}\, \mathrm{d}u$, et les intégrales $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^n)\, \mathrm{d}t$ et $I'_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{n}\, \sin(u)\, u^{\frac{1}{n}-1}\, \mathrm{d}u$ sont de même nature, et ont la même valeur en cas de convergence.

Or, on reconnaît $I'_n = \dfrac{1}{n}\, K_\alpha$ en choisissant $\alpha = 1 - \dfrac{1}{n}$. Comme $0 < \alpha < 2$, on sait que l'intégrale K_α converge, il en est donc de même de l'intégrale I_n. En utilisant enfin **4.b.**, on a finalement

$$\forall n \geq 2 \qquad I_n = \frac{1}{n}\, K_{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) J_{1-\frac{1}{n}} \ .$$

b. Posons $h(\alpha, t) = \dfrac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}$ pour $(\alpha, t) \in]0, 2[\times]0, +\infty[$. Cette application est continue (en tant que fonction de deux variables) sur $]0, 2[\times \mathbb{R}_+^*$, ce qui entraîne la continuité de ses applications partielles.

Soit $S = [a, b]$ un segment inclus dans $]0, 2[$, donc $0 < a < b < 2$.

- si $(\alpha,t) \in S \times]0,1]$, on peut écrire $0 \le h(\alpha,t) \le h(b,t) = \dfrac{1-\cos(t)}{t^{b+1}}$;

- si $(\alpha,t) \in S \times]1,+\infty[$, on peut écrire $0 \le h(\alpha,t) \le h(a,t) = \dfrac{1-\cos(t)}{t^{a+1}}$.

Dans les deux cas, donc finalement pour tout couple $(\alpha,t) \in S \times \mathbb{R}_+^*$, on peut écrire

$$0 \le h(\alpha,t) \le h(a,t) + h(b,t) = \frac{1-\cos(t)}{t^{a+1}} + \frac{1-\cos(t)}{t^{b+1}} ,$$

l'application $t \mapsto h(a,t) + h(b,t)$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après l'étude faite en **4.a.**

Cette condition de domination permet d'appliquer le théorème de continuité des intégrales à paramètre, et d'affirmer que l'application $\alpha \mapsto J_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} h(\alpha,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur l'intervalle $]0,2[$.

c. Repartons de la relation $n\,I_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) J_{1-\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} J_{1-\frac{1}{n}} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^{2-\frac{1}{n}}}\,\mathrm{d}t$.

La continuité de $\alpha \mapsto J_\alpha$ au point 1 permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_{1-\frac{1}{n}} = J_1 = J = \frac{\pi}{2}$.

On a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\,I_n = \frac{\pi}{2}$, soit $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$.