DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 7
COMMENTAIRES
PSI2 2025-2026

PROBLÈME 1

3. Il est écrit dans le programme de MPSI/PCSI que toute famille de polynômes non nuls de degrés distincts est libre, il est donc inutile d'en écrire une démonstration.

11. "Préciser les éléments propres" signifie:

- donner la liste des valeurs propres ;

- pour chaque valeur propre, **préciser le sous-espace propre** (SEP) associé.

Si les valeurs propres ont été généralement bien précisées, on ne peut pas en dire autant des SEP. Il ne suffit pas de dire que L_k est un vecteur propre associé à la valeur propre $k(k+1)$, mais il faut préciser que le SEP est de dimension 1, i.e. $E_{k(k+1)}(\varphi_n) = \mathrm{Vect}(L_k)$.

12. Mêmes remarques qu'en **Q11.** Et comment passer de la dimension finie ($\mathbb{R}_n[X]$) à la dimension infinie ($\mathbb{R}[X]$) ? Un minimum de rédaction était ici nécessaire. Et mentionner un "passage à la limite" était particulièrement fumeux!

13. L'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ étant de dimension infinie (préhilbertien), il est toujours possible de parler d'endomorphisme "symétrique" ("autoadjoint" est plus critiquable car l'adjoint n'existe pas toujours, mais on est là bien au-dela du programme).

15. C'est plus ou moins une question de cours, mais je pense que cela méritait d'être développé un peu.

17. Je rappelle que **"passer à la limite" dans une inégalité n'est autorisé qu'une fois que l'on s'est assuré de l'existence des limites des différents termes**. Je pense qu'il était donc ici impératif de commencer la rédaction par: " $\sum c_k(f)^2$ est une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées, elle est donc convergente".

18. Question assez délicate, et souvent rédigée à la va-vite. En effet, il faut prendre garde à deux choses:

- la convergence uniforme est une convergence pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, et on a besoin ici de majorer une norme $\|\cdot\|_2$. Quel lien y a-t-il entre ces deux normes sur E ? Sont-elles équivalentes ? *Réponse: non, elles ne sont pas équivalentes, mais on a tout de même l'inégalité facile* $\|\cdot\|_2 \leq \sqrt{2}\,\|\cdot\|_\infty$*, qui est ici suffisante.*

- si une suite (P_n) de polynômes converge uniformément vers f, que sait-on du degré du polynôme P_n ? *Réponse: rien!* Si, par exemple, $\|P_n - f\|_2 \leq \varepsilon$, c'est en posant $N = \deg(P_n)$ que l'on peut affirmer que $d_2\big(f, \mathbb{R}_N[X]\big) \leq \varepsilon$. Les entiers n et N sont donc a priori différents.

Enfin, la suite de polynômes (P_n) qui converge uniformément vers f sur $[-1, 1]$ n'a aucun lien a priori avec les polynômes T_n de la question **15.**

PROBLÈME 2

Beaucoup d'erreurs encore dans ce petit problème, comme des majorations fausses, ou des "dominations" qui n'en sont pas puisque le majorant dépend encore du paramètre! C'est donc un chapitre à travailler!!

1. Mentionner le "prolongement par continuité" de l'intégrande en 0.

2. La limite nulle en $+\infty$ est souvent mentionnée, le comportement au voisinage de 0 (prolongement par continuité) ne l'est pas toujours. Enfin, il faudrait **démontrer** (et pas seulement **affirmer**) que toute fonction continue sur $]0, +\infty[$ et ayant des limites finies aux bornes de cet intervalle est bornée sur cet intervalle. Pour cela, il me semble impératif de mentionner quelque part le **théorème des bornes atteintes**.

3.a. On demande la continuté de g sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ (oui, fermé en 0!). Écrire une condition de domination sur un segment $[a, b]$ avec $0 < a < b$ ne suffira donc pas, cela permettrait seulement de montrer la continuité de g sur $]0, +\infty[$ (oui, ouvert en 0)! Et, pour la question **3.h.**, on a besoin de la continuité (à droite) de g en 0...

3.b. Comme dit en préambule, il y a pas mal d'erreurs dans les majorations/dominations, et certain(e)s semblent avoir mal compris ce que signifie "dominer" (majorer en module par une fonction intégrable **<u>ne dépendant pas du paramètre</u>**).

Certains affirment que la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{1 - \cos(t)}{t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$... mais c'est faux, elle n'est pas intégrable en $+\infty$.

3.c. Pour calculer une primitive de $t \mapsto \cos(t)\, e^{-xt}$, le plus rapide est d'écrire que c'est la partie réelle de $e^{(-x+i)t}$. On peut aussi faire deux intégrations par parties... mais c'est moche!

3.d. On peut bien sûr répondre à cette question en utilisant le théorème de convergence dominée à paramètre continu. Encore faudrait-il que la "domination" soit correcte! **Mais cette frénésie d'applications de théorèmes m'agace un peu quand des arguments élémentaires permettent de conclure.** En effet, il suffit ici de majorer les valeurs absolues des intégrales définissant $g(x)$ et $g'(x)$ en utilisant la question **2.**, i.e. en faisant intervenir $\|\varphi\|_\infty$ et $\|\psi\|_\infty$.

4.a. La fonction $t \mapsto \dfrac{1 - \cos(t)}{t^{\alpha+1}}$ n'est pas prolongeable par continuité en 0. Enfin, pas toujours! Elle l'est si $\alpha \leq 1$, pas si $1 < \alpha < 2$.

5.a. Des calculs parfois embrouillés.

5.b. La domination, ici, est un peu plus "technique" car on ne majore pas de la même façon selon que $0 < t < 1$ ou que $t > 1$.