Endomorphismes des espaces euclidiens

Encore un peu de théorème spectral et d'endomorphismes autoadjoints positifs ou définis positifs, *cf.* programme précédent

Probabilités

Familles sommables (indexées par un ensemble I au plus dénombrable) d'éléments de $[0, +\infty]$ (alias "le monde des bisounours": on peut sommer par paquets, intervertir des sommations, majorer sans se poser de questions, la famille est dite sommable si $\sum_{i \in I} x_i < +\infty$).

Aucune démonstration, aucun exercice spécifiquement sur les familles sommables ne doit être proposé, il ne s'agit que d'un outil à utiliser dans le contexte des démonstrations de cours et des résolutions d'exercices de probabilités.

Notion de tribu sur un univers Ω, espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$. Notion de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Propriétés de continuité monotone, de sous-additivité.

Événements presque sûrs, événements négligeables, systèmes quasi-complets d'événements.

Probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes. Événements indépendants (familles finies).

Notion de variable aléatoire discrète (*les seules au programme*), loi d'une telle variable aléatoire.

Loi géométrique. Définition. Interprétation comme "temps d'attente d'un succès".

Loi de Poisson. Interprétation comme "loi des événements rares".

Couples ou n-uplets de variables aléatoires, loi conjointe, lois marginales. Loi conditionnelle d'une variable aléatoire sachant un événement (de probabilité non nulle).

Variables aléatoires indépendantes (familles finies). Si X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes, extension au cas de n variables. Lemme des coalitions. Suites de variables i.i.d. (indépendantes identiquement distribuées).

Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $[0, +\infty]$, alors $\mathrm{E}(X) \in [0, +\infty]$.

Si $X(\Omega) \subset \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, alors $\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$.

Démonstrations de cours ou proches du cours

- Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs. Caractérisation par le spectre.
- Encadrement de $\big(u(x)|x\big)$ pour $x \in E$ euclidien, avec $u \in \mathcal{S}(E)$ tel que $\mathrm{Sp}(u) \subset [\alpha, \beta]$.
- Existence d'une racine carrée symétrique positive d'une matrice symétrique positive (unicité non exigible).
- Propriété de sous-additivité d'une probabilité.
- Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Interprétation comme loi des événements rares: "loi-limite" de $\mathcal{B}\Big(n, \dfrac{\lambda}{n}\Big)$.
- Somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson.