Notion de probabilité. Espaces probabilisés.

1. Un animal erre entre trois points d'eau A, B, C. À l'instant $t = 0$, il est au point A. Si, à l'instant n, il est en l'un des trois points A, B ou C, il en part alors et sera à l'instant $n+1$ de façon équiprobable en l'un des deux autres points d'eau. Pour n entier naturel, on note a_n la probabilité pour que l'animal soit au point A à l'instant n. On définit de même b_n et c_n.

a. Exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

b. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'elle est diagonalisable et, en moins d'une minute, trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

c. Exprimer a_n, b_n, c_n en fonction de n.

- -

a. Si l'on note A_n l'événement: "à l'instant n, l'animal se trouve au point A", et de même, B_n et C_n, on a alors, par la formule des probabilités totales,

$$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1}|A_n)\,P(A_n) + P(A_{n+1}|B_n)\,P(B_n) + P(A_{n+1}|C_n)\,P(C_n)\ ,$$

soit $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(b_n + c_n)$ et, de même, $b_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + c_n)$ et $c_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + b_n)$.

b. La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable, on note que $M = A + \dfrac{1}{2}I_3 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1, et que $\mathrm{Ker}(M) = E_0(M) = E_{-\frac{1}{2}}(A)$ est le plan d'équation cartésienne $x + y + z = 0$. En utilisant (par exemple) la trace, on voit que 1 est valeur propre de A, le sous-espace propre associé étant la droite engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On peut par exemple utiliser le fait que, la matrice A étant symétrique réelle, ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux. On déduit facilement que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}\Big(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 1\Big)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

c. On introduit le vecteur-colonne $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Alors $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et, pour tout n entier naturel, on a $X_{n+1} = AX_n$, d'où classiquement $X_n = A^n X_0$. On a $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, puis $A^n = P\ D^n\ P^{-1} = \begin{pmatrix} x_n & y_n & y_n \\ y_n & x_n & y_n \\ y_n & y_n & x_n \end{pmatrix}$, avec $x_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} \times \Big(-\dfrac{1}{2}^n\Big)$ et $y_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3} \times \Big(-\dfrac{1}{2}^n\Big)$. Enfin, $X_n = A^n X_0$ est la première colonne de A^n, donc

$$a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \Big(-\frac{1}{2}^n\Big) \qquad \text{et} \qquad b_n = c_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \Big(-\frac{1}{2}^n\Big)\ .$$

2. On effectue une suite de lancers indépendants d'une pièce de monnaie. La probabilité d'obtenir "Face" à chaque lancer est $p \in]0,1[$.
Pour tout $n \geq 1$, on considère l'événement U_n: "on obtient deux Face de suite, pour la première fois, aux lancers numéros n et $n+1$", et on pose $u_n = P(U_n)$.

Notons r_n la probabilité qu'au cours des n premiers lancers, on ait obtenu au moins une fois deux Face consécutifs. Exprimer r_n en fonction des u_k. On considère aussi l'événement

E_n: "il existe $k \in [\![1,n]\!]$ tel que l'on ait obtenu Face aux lancers numéros $2k-1$ et $2k$".

Montrer que $P(E_n) = 1-(1-p^2)^n$. Montrer que $P(E_n) \leq r_{2n}$. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$. Interpréter.

- -

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous noterons F_n l'événement: "le n-ème lancer donne Face" et $P_n = \overline{F_n}$ l'événement contraire, à savoir: "le n-ème lancer donne Pile". On a donc $P(F_n) = p$.

Si, pour $n \geq 2$, on note R_n l'événement: "au cours des n premiers lancers, on obtient au moins une fois deux Face consécutifs", on a $R_n = \displaystyle\bigsqcup_{k=1}^{n-1} U_k$ (réunion disjointe). Donc $r_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} u_k$. On a ensuite $E_n = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} (F_{2k-1} \cap F_{2k})$, donc $\overline{E_n} = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} (\overline{F_{2k-1}} \cup \overline{F_{2k}}) = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} \left(\overline{F_{2k-1} \cap F_{2k}}\right)$. Or, $P\left(\overline{F_{2k-1} \cap F_{2k}}\right) = 1-p^2$. Par indépendance, $P(\overline{E_n}) = (1-p^2)^n$, puis $P(E_n) = 1-(1-p^2)^n$. En termes d'événements, on a clairement $E_n \subset R_{2n}$, donc par croissance d'une probabilité, $P(E_n) \leq P(R_{2n}) = r_{2n}$. On a alors les inégalités $1-(1-p^2)^n \leq r_{2n} \leq 1$. Par encadrement, on déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} r_{2n} = 1$. La suite (r_n) étant croissante (sommes partielles d'une série à termes positifs), on déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} r_n = 1$, soit $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$. Il est donc presque sûr que l'on obtiendra "un jour" deux Face consécutifs.

Remarque. On peut obtenir ce dernier résultat un peu plus simplement. En effet, si l'on note E l'événement: "on obtient au moins une fois deux Face consécutifs", alors on a $E_n \subset E$ pour tout n. Donc $P(E_n) \leq P(E) \leq 1$ pour tout n. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(E_n) = 1$, alors $P(E) = 1$.

3*. Problème de la ruine du joueur. Deux joueurs A et B s'affrontent en des parties indépendantes. Le joueur A dispose d'une fortune égale à n brouzoufs tandis que le joueur B dispose de $N-n$ brouzoufs. À chaque tour, le joueur A a la probabilité $p \in]0,1[$ de l'emporter et le joueur B a la probabilité complémentaire $q = 1-p$. Le joueur perdant cède alors un brouzouf au vainqueur. Le jeu continue jusqu'à la ruine d'un des deux joueurs. On note a_n la probabilité que le joueur A l'emporte lorsque sa fortune initiale vaut n.

a. Que valent a_0 et a_N ? Établir la formule de récurrence

$$\forall n \in [\![1, N-1]\!] \qquad a_n = p\, a_{n+1} + q\, a_{n-1}\ .$$

b. En déduire que la suite $(u_n)_{1\leq n\leq N}$ définie par $u_n = a_n - a_{n-1}$ est géométrique.

c. Calculer a_n en distinguant les cas $p = q$ et $p \neq q$.

d. Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement.

- -

a. On a $a_0 = 0$ et $a_N = 1$.

Supposons que le joueur A possède une fortune initiale de n brouzoufs. Notons T l'événement: "le joueur A gagne le premier tour de jeu", et E_n l'événement: "le joueur A gagne la partie". On a alors, par la formule des probabilités totales, la relation

$$a_n = P(E_n) = P(E_n|T)\,P(T) + P(E_n|\overline{T})\,P(\overline{T})\ .$$

Or, $P(T) = p$, $P(\overline{T}) = q$, $P(E_n|T) = a_{n+1} = P(E_{n+1})$ puisque cela revient à démarrer la partie avec une fortune initiale de $n+1$ brouzoufs pour le joueur A, et de même $P(E_n|\overline{T}) = P(E_{n-1}) = a_{n-1}$. On obtient bien la relation

$$a_n = p\,a_{n+1} + q\,a_{n-1}\ .$$

b. La relation obtenue ci-dessus s'écrit aussi $p\,a_n + q\,a_n = p\,a_{n+1} + q\,a_{n-1}$, soit encore $q\,(a_n - a_{n-1}) = p\,(a_{n+1} - a_n)$, ou encore $u_{n+1} = \dfrac{q}{p}\,u_n$.

c. • Si $p = q = \dfrac{1}{2}$, alors la suite (u_n) est constante, ce qui signifie que (a_n) est une suite arithmétique. Avec $a_0 = 0$ et $a_N = 1$, on déduit $a_n = \dfrac{n}{N}$ pour $n \in [\![0, N]\!]$.

• Si $p \neq q$, i.e. si $p \neq \dfrac{1}{2}$, on a, pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, $u_n = \left(\dfrac{q}{p}\right)^{n-1} u_1 = \left(\dfrac{q}{p}\right)^{n-1} a_1$, puis

$$a_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} u_k = a_1 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{q}{p}\right)^k = a_1\,\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\frac{q}{p}}\ .$$

Ensuite la relation $a_N = 1$ fournit $a_1 = \dfrac{1-\frac{q}{p}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}$. Finalement,

$$\forall n \in [\![0, N]\!] \qquad a_n = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}\ .$$

d. Un calcul symétrique montre que la probabilité que le joueur B gagne lorsque sa fortune initiale vaut n est $b_n = \dfrac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^n}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^N}$. Un calcul laissé au lecteur montre que $a_n + b_{N-n} = 1$, il est donc presque sûr que l'un des deux joueurs gagne en un temps fini.

---

4. Soit (A_n) une suite d'événements sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On pose $S = \displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty}\Big(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\Big)$.

a. Montrer que S est un événement, i.e. $S \in \mathcal{A}$, et qu'il est réalisé si et seulement si une infinité des événements A_n sont réalisés.

b. Dans cette question et la suivante, on considère une suite infinie de lancers indépendants d'une pièce, la probabilité d'obtenir "Pile" à chaque lancer étant $p \in]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'événement A_n : "au cours des $2n$ premiers lancers, on obtient autant de Pile que de Face". Calculer $P(A_n)$ pour tout n.

c. Montrer que, pour tout n entier naturel, on a $\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} \leq 4^n$. En déduire que, si $p \neq \dfrac{1}{2}$, la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} P(A_n)$ converge. Montrer alors que $P(S) = 0$.

- -

a. Une tribu est stable par réunion ou intersection finie ou dénombrable, donc $S \in \mathcal{A}$. Soit par ailleurs $\omega \in \Omega$. On a

$$\omega \in S \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists k \geq n \quad \omega \in A_k\ .$$

Cela signifie que l'ensemble des indices k tels que $\omega \in A_k$ est une partie de $\mathbb{N}$ non majorée, ou ce qui revient au même, une partie de $\mathbb{N}$ infinie.

b. On reconnaît un schéma de Bernoulli (répétition de $2n$ épreuves de Bernoulli indépendantes) de paramètres $2n$ et p, la probabilité d'apparition de n "succès" lors de $2n$ épreuves est alors $P(A_n) = \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} p^n (1-p)^n$, c'est la loi binomiale $\mathcal{B}(2n, p)$.

c. L'inégalité $\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix} \leq 4^n$ est vraie pour $n = 0$ (c'est alors une égalité), et on récurre facilement après avoir vérifié que

$$\frac{\begin{pmatrix} 2(n+1) \\ n+1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}} = \frac{(2n+2)!}{\big((n+1)!\big)^2}\,\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{2(2n+1)}{n+1} \leq \frac{4n+4}{n+1} = 4\ .$$

Si $p \neq \dfrac{1}{2}$, alors $p(1-p) < \dfrac{1}{4}$ (étudier les variations de $x \mapsto x(1-x)$ sur $[0,1]$), et alors $0 \leq P(A_n) \leq \big[4p(1-p)\big]^n$ (majoration par une suite géométrique de raison < 1), donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum P(A_n)$ est convergente.

Posons $B_n = \displaystyle\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$, alors $P(B_n) \leq \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$ par la propriété de sous-additivité, mais comme le reste d'ordre n d'une série convergente tend vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$, on en tire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = 0$. Enfin, on a $S \subset B_n$ pour tout n, donc par croissance d'une probabilité, $0 \leq P(S) \leq P(B_n)$ pour tout n. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = 0$, on déduit que $P(S) = 0$.

Autrement dit, si la pièce est déséquilibrée ($p \neq \dfrac{1}{2}$), le jeu sera presque sûrement définitivement déséquilibré à partir d'un certain moment. J'essaie de m'expliquer plus clairement: par exemple, si $p > \dfrac{1}{2}$, alors à chaque lancer, il est plus probable d'obtenir "Pile" que "Face" et, si l'on répète indéfiniment des lancers de cette pièce, il est presque sûr (événement de probabilité 1) qu'à partir d'un certain moment, on comptabilisera toujours strictement plus de "Pile" que de "Face" dans les lancers déjà effectués. Bref, si une équipe est vraiment meilleure qu'une autre à un jeu qu'elles répètent indéfiniment, il est presque sûr qu'il arrivera un moment où les deux équipes n'égaliseront plus, l'avantage restant définitivement à l'équipe la plus forte.

5*. Soit (A_n) une suite d'événements mutuellement indépendants. Montrer que la probabilité qu'aucun des événements A_n ne soit réalisé est majorée par $M = \exp\Big(-\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)\Big)$.

On pourra utiliser l'inégalité $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 - x \leq e^{-x}$.

- -

Pour tout n, on a, puisque les $\overline{A_n}$ sont aussi mutuellement indépendants,

$$\textbf{(*)} : \qquad P\Big(\bigcap_{k=0}^{n} \overline{A_k}\Big) = \prod_{k=0}^{n} P\big(\,\overline{A_k}\,\big) = \prod_{k=0}^{n} \big(1 - P(A_k)\big) \leq \prod_{k=0}^{n} e^{-P(A_k)} = \exp\Big(-\sum_{k=0}^{n} P(A_k)\Big)\,.$$

Par continuité décroissante, puisque $\bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n$ avec $B_n = \bigcap_{k=0}^{n} \overline{A_k}$, la suite (B_n) étant décroissante pour l'inclusion, on a donc $\lim_{n\to+\infty} P\Big(\bigcap_{k=0}^{n} \overline{A_k}\Big) = P\Big(\bigcap_{k=0}^{+\infty} \overline{A_k}\Big)$.

Par ailleurs, $\lim_{n\to+\infty} \exp\Big(-\sum_{k=0}^{n} P(A_k)\Big) = \exp\Big(-\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)\Big) = M$ par continuité de l'exponentielle, en convenant que $M = 0$ si la série $\sum P(A_k)$ diverge, ce qui est cohérent. Par passage à la limite dans **(*)**, on obtient alors l'inégalité demandée.

Remarque. On déduit notamment que, si les A_n sont mutuellement indépendants et si la série $\sum P(A_n)$ diverge, alors il est presque sûr qu'aucun moins un des événements A_n se réalise.

Variables aléatoires discrètes.

6. Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent des lois géométriques $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(q)$ respectivement. Calculer $P(X < Y)$.

- -

On décompose $\{X < Y\} = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} \big(\{X = k\} \cap \{Y > k\}\big)$. Par σ-additivité de P, puis indépendance des variables X et Y, on obtient

$$P(X < Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)\,P(Y > k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1}\,(1-q)^k = p\,(1-q) \sum_{k=0}^{+\infty} \big((1-p)(1-q)\big)^k\,.$$

Cela donne $P(X < Y) = \dfrac{p(1-q)}{1-(1-p)(1-q)} = \dfrac{p - pq}{p + q - pq}$.

7. Calculer $\mathrm{E}\Big(\dfrac{1}{X+1}\Big)$ si X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

- -

C'est juste un petit calcul: la formule du transfert donne $\mathrm{E}\Big(\dfrac{1}{X+1}\Big) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{k+1}\, e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$ sous réserve que cette série converge. *On peut aussi dire que le calcul est toujours possible dans* $[0, +\infty]$ *puisque tous les termes sont positifs.* Mais le terme général $e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{(k+1)!}$ est, à un décalage d'indice près, celui d'une série exponentielle, d'où la convergence, soit $\dfrac{1}{X+1}$ est d'espérance finie et

$$\mathrm{E}\Big(\frac{1}{X+1}\Big) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k+1)!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}\ .$$

---

8. Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent des lois géométriques $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(q)$ respectivement. Quelle est la probabilité que la matrice $A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

- -

On note d'abord que la matrice aléatoire $A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & 1 \\ 0 & Y(\omega) \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si $X(\omega) \neq Y(\omega)$: en effet, elle est triangulaire donc, si $X(\omega) \neq Y(\omega)$, elle admet deux valeurs propres distinctes, ce qui entraîne sa diagonalisabilité, tandis que si $X(\omega) = Y(\omega)$, elle a une seule valeur propre et elle n'est pas scalaire donc elle n'est pas diagonalisable. L'événement $\{A \text{ est diagonalisable}\}$ coïncide donc avec l'événement $\{X \neq Y\}$. Il est plus facile de travailler sur l'événement contraire, puisque

$$\{X = Y\} = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} \Big(\{X = k\} \cap \{Y = k\}\Big)\ ,$$

Par incompatibilité puis indépendance, on déduit

$$\begin{aligned} P(X = Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P\big(X = k \text{ et } Y = k\big) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)\, P(Y = k) \\ &= pq \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1}(1-q)^{k-1} \\ &= pq \sum_{k=0}^{+\infty} \big((1-p)(1-q)\big)^k \\ &= \frac{pq}{1-(1-p)(1-q)}\ . \end{aligned}$$

Enfin, $P\big(\{A \text{ est diagonalisable}\}\big) = 1 - P(X = Y) = \dfrac{p+q-2pq}{p+q-pq}$.

---

9. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$. On considère N variables aléatoires $X_1, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

a. Soit $i \in [\![1, N]\!]$, soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $P(X_i \leq n)$, puis $P(X_i > n)$.

b. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leq i \leq N} X_i$, c'est-à-dire

$$\forall \omega \in \Omega \qquad Y(\omega) = \min\big\{X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega)\big\} .$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(Y > n)$. En déduire $P(Y \leq n)$, puis $P(Y = n)$.

c. Reconnaître la loi de Y. En déduire $\mathrm{E}(Y)$.

- -

a. On a $P(X_i = k) = q\, p^{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, donc

$$P(X_i \leq n) = \sum_{k=1}^{n} P(X_i = k) = \sum_{k=1}^{n} pq^{k-1} = p \sum_{k=0}^{n-1} q^k = p\,\frac{1-q^n}{1-q} = 1 - q^n .$$

Par événement contraire, $P(X_i > n) = 1 - P(X_i \leq n) = q^n = (1-p)^n$.

b. Si $\omega \in \Omega$, on a $Y(\omega) > n \iff \min\big\{X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega)\big\} > n \iff \forall i \in [\![1, N]\!]\ \ X_i(\omega) > n$,

donc $\{Y > n\} = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{N} \{X_i > N\}$ et, par indépendance des variables X_i,

$$P(Y > n) = \prod_{i=1}^{N} P(X_i > n) = (q^n)^N = q^{nN} .$$

Par événement contraire de nouveau, $P(Y \leq n) = 1 - P(Y > n) = 1 - q^{nN}$, puis

$$P(Y = n) = P(Y > n-1) - P(Y > n) = q^{(n-1)N} - q^{nN} = q^{(n-1)N}(1 - q^N) .$$

c. On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = n) = (1 - q^N)\,(q^N)^{n-1}$, on reconnaît une loi géométrique de paramètre $1 - q^N$. Donc, d'après le cours, $\mathrm{E}(Y) = \dfrac{1}{1-q^N}$.

---

10. Lors d'une rencontre d'athlétisme, la barre est montée d'un cran après chaque saut réussi par le concurrent. La compétition s'arrête pour le sauteur au premier saut raté. Pour le saut numéro n, l'athlète a une chance sur n de passer la barre. On note X le rang du dernier saut réussi.

Quelle est la loi de X? Montrer que X^2 est d'espérance finie, calculer l'espérance et la variance de X.

- -

---

11. On considère un détecteur de particules ayant une probabilité de détection de chaque particule ègale à $p \in]0,1[$. On note N et S les variables aléatoires qui comptent respectivement le nombre de particules arrivant sur le capteur et le nombre de particules détectées. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ.

a. Soient s et n entiers naturels. Calculer $P(S=s|N=n)$, puis $P(S=s,N=n)$. En déduire la loi de S.

b. Sans calcul, donner la loi de $N-S$.

c. Les variables S et $N-S$ sont-elles indépendantes ?

d. Les variables N et S sont-elles indépendantes ?

- -

a. La loi conditionnelle de S sachant $N=n$ est binomiale de paramètres n et p, autrement dit

$$\forall (s,n)\in\mathbb{N}^2 \qquad P\big(S=s\mid N=n\big)=\begin{cases}\dbinom{n}{s}p^s(1-p)^{n-s} & \text{si } 0\leq s\leq n\\ 0 & \text{si } \quad s>n\end{cases}.$$

Par la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}P\big(S=s\ ,\ N=n\big) &= P(N=n)\ P\big(S=s\mid N=n\big)\\ &= \begin{cases} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}\dbinom{n}{s}p^s(1-p)^{n-s} & \text{si } 0\leq s\leq n\\ 0 & \text{si } \quad s>n\end{cases}\end{aligned}$$

Enfin, par la formule des probabilités totales, en posant $q=1-p$ pour abréger,

$$\begin{aligned}P(S=s) &= \sum_{n=s}^{+\infty}P\big(S=s\ ,\ N=n\big)\\ &= \sum_{n=s}^{+\infty}e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{s}p^sq^{n-s}\\ &= \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^s\,p^s}{s!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k\,q^k}{k!} \qquad (\textit{avec } k=n-s)\\ &= \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^s\,p^s}{s!}\,e^{\lambda q} = e^{-\lambda p}\,\frac{(\lambda p)^s}{s!}\ .\end{aligned}$$

La variable S suit donc la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p)$.

b. La variable $N-S$ représente le nombre de particules ayant échappé à la détection. Or, la probabilité de non-détection d'une particule arrivant sur le capteur est $q=1-p$. *En quelque sorte, les succès deviennent des échecs et inversement.* Il suffit donc d'échanger p et q pour avoir la loi de la variable $N-S$, c'est donc $\mathcal{P}(\lambda q)$.

c. Si k et l sont deux entiers naturels, on a

$$P\big(S=k,N-S=l\big)=P\big(S=k,N=k+l\big)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+l}}{(k+l)!}\binom{k+l}{k}p^kq^l\ ,$$

tandis que

$$P(S=k)\ P(N-S=l)=e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\,e^{-\lambda q}\,\frac{(\lambda q)^l}{l!}=e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^{k+l}\,p^k\,q^l}{k!\,l!}\ .$$

On constate que les deux expressions sont égales, les variables S et $N-S$ sont donc indépendantes.

d. Les variables S et N ne sont pas indépendantes, par exemple car $P\big(S=2, N=1\big)=0$, alors que $P(S=2)$ et $P(N=1)$ sont tous les deux non nuls.

---

12. Une urne contient trois boules numérotées 1, 2, 3. On tire avec remise une boule dans cette urne, on note X le nombre de tirages nécessaires pour voir apparaître les trois numéros. On note A le rang d'apparition du premier 1, B celui du premier 2, C celui du premier 3.

a. Exprimer l'événement $\{X>n\}$ en fonction de A, B et C. Calculer $P(X>n)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

b. Calculer $P(X=n)$, puis $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n)$. Interpréter.

c. La variable X est-elle d'espérance finie ? Si oui, calculer $\mathrm{E}(X)$.

- -

a. Notons que $X(\Omega)=[\![3,+\infty[\![$. L'événement $\{X>n\}$ se réalise lorsqu'au moins une des trois boules n'est pas apparue lors des n premiers tirages, donc

$$\{X>n\}=\{A>n\}\ \cup\ \{B>n\}\ \cup\ \{C>n\}\ .$$

Posons $E=\{A>n\}$, $F=\{B>n\}$, $G=\{C>n\}$. Il est connu que $P(E\ \cup\ F)=P(E)+P(F)-P(E\ \cap\ F)$. En itérant, on obtient

$$\begin{aligned}
P(E\ \cup\ F\ \cup\ G) &= P\big((E\ \cup\ F)\ \cup\ G\big)\\
&= P(E\ \cup\ F)+P(G)-P\big((E\ \cup\ F)\ \cap\ G\big)\\
&= P(E)+P(F)-P(E\ \cap\ F)+P(G)-P\big((E\ \cap\ G)\ \cup\ (F\ \cap\ G)\big)\\
&= P(E)+P(F)+P(G)-P(E\ \cap\ F)-P(F\ \cap\ G)-P(G\ \cap\ E)+P(E\ \cap\ F\ \cap\ G)\ .
\end{aligned}$$

Pour démontrer cette relation, cas particulier de la "formule de Poincaré", dite aussi "formule du crible" (*hors programme*), on a utilisé notamment la distributivité de l'intersection par rapport à a réunion: $(E\ \cup\ F)\ \cap\ G=(E\ \cap\ G)\ \cup\ (F\ \cap\ G)$, et l'égalité évidente $(E\ \cap\ G)\ \cap\ (F\ \cap\ G)=E\ \cap\ F\ \cap\ G$.

Ici, les événements E, F, G ont tous trois pour probabilité $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, les événements $E\ \cap\ F$, $F\ \cap\ G$ et $G\ \cap\ E$ ont tous trois pour probabilité $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, enfin $E\ \cap\ F\ \cap\ G=\emptyset$. Finalement,

$$\forall n\geq 3\qquad P(X>n)=P(E\ \cup\ F\ \cup\ G)=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^n-3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{2^n-1}{3^{n-1}}\ .$$

Notons que cela reste cohérent pour $n=1$ et $n=2$ puisque $P(X>1)=P(X>2)=1$.

b. Pour $n\geq 3$, on a

$$P(X=n)=P(X>n-1)-P(X>n)=\frac{2^{n-1}-1}{3^{n-2}}-\frac{2^n-1}{3^{n-1}}=\frac{2^{n-1}-2}{3^{n-1}}\ .$$

On peut calculer "bêtement" la somme de la série (ce sont des séries géométriques), mais on peut aussi utiliser le télescopage:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n) = \sum_{n=3}^{+\infty} \Big(P(X>n-1) - P(X>n) \Big) = P(X>2) - \lim_{n\to+\infty} P(X>n) = 1 - 0 = 1 \ ,$$

ce qui rassure toujours! De façon presque sûre, on finira par voir apparaître les trois boules.

c. Comme X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, il suffit de considérer la série $\sum_{n\geq 1} P(X \geq n)$, qui est aussi, par décalage, $\sum_{n\geq 0} P(X \geq n-1)$, soit encore $\sum_{n\geq 0} P(X > n)$. On a alors une combinaison linéaire de deux séries géométriques de raisons $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$, d'où la convergence, ce qui montre que $X \in L^1(\Omega)$, puis

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X>n) = 1+1+1+\sum_{n=3}^{+\infty} \left[3\times\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n \right] = 3 + \frac{3\times\frac{8}{27}}{1-\frac{2}{3}} + \frac{3\times\frac{1}{27}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{11}{2} \ .$$