DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES numéro 6

PSI2 2025-2026 **Durée: 4 heures** **07/02/2026**

PROBLÈME 1

Dans tout ce problème, on notera $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

Ainsi, si $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$, on a $(X|Y) = X^\top Y$ et $\|X\|^2 = X^\top X$.

On admettra que, si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n, alors les matrices AB et BA ont le même polynôme caractéristique: $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

PARTIE A. Notion de valeur singulière

Dans cette partie, on fixe un entier $n \geq 2$, une matrice A appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on pose $r = \mathrm{rg}(A)$. On note f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ dont les matrices dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ sont A et $A^\top A$ respectivement.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$, puis que $\mathrm{rg}(A^\top A) = r$.

2. Montrer que $A^\top A$ et $AA^\top$ sont des matrices symétriques positives.

3. Montrer qu'il existe deux matrices orthogonales $P, Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et une même matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A^\top A = PDP^\top \qquad \text{et} \qquad AA^\top = QDQ^\top .$$

4. Montrer que la matrice D possède exactement r termes diagonaux non nuls.

Si l'on note $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de $A^\top A$ (comptées avec leur multiplicité), les λ_i étant positifs ou nuls d'après **Q2.**, on peut poser $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Ces réels positifs σ_i sont appelés les **valeurs singulières** de la matrice A, ce sont donc les racines carrées des valeurs propres de $A^\top A$.

5. Soient U et V deux matrices orthogonales. Montrer que les matrices UAV et A ont les mêmes valeurs singulières.

6. Dans cette question seulement, on suppose que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique réelle. Quel lien y a-t-il entre les valeurs singulières de A et ses valeurs propres ?

PARTIE B. Décomposition en valeurs singulières

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont on notera $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ les valeurs singulières, maintenant indexées dans l'ordre croissant: $0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \cdots \leq \sigma_n$. On note toujours f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A.

7.a. Vérifier, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, la relation $\|AX\|^2 = (X \mid A^\top AX)$.

b. En déduire l'encadrement

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \qquad \sigma_1 \|X\| \leq \|AX\| \leq \sigma_n \|X\| .$$

c. Montrer que $\sigma_1 = \min\limits_{X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \dfrac{\|AX\|}{\|X\|}$ et $\sigma_n = \max\limits_{X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \dfrac{\|AX\|}{\|X\|}$.

d*. Montrer que $\left\{ \dfrac{\|AX\|}{\|X\|} \; ; \; X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\} = [\sigma_1, \sigma_n]$.

Dans toute la suite du problème, on suppose A inversible, ses valeurs singulières $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ sont donc strictement positives.

8. Montrer l'existence d'une base orthonormale $\mathcal{B}_1 = (X_1, \cdots, X_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \qquad A^\top AX_i = \sigma_i^2 \, X_i .$$

9. Montrer que, si l'on pose $Y_i = \dfrac{1}{\sigma_i} AX_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, alors la famille $\mathcal{B}_2 = (Y_1, \cdots, Y_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

10. Montrer que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)$ est diagonale.

11. En déduire l'existence de deux matrices orthogonales $U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $V \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, et d'une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = UDV$.

Une telle écriture est appelée **décomposition en valeurs singulières** de la matrice A.

12. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -5 & -11 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $A^\top A$. Déterminer les valeurs singulières de A, puis obtenir une décomposition en valeurs singulières de la matrice A.

PROBLÈME 2

PARTIE A. Calculs utilisant des séries entières.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} x^n$, et montrer que $\forall x \in]-R, R[\quad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

2. Montrer que

$$\forall x \in]-R, R[\, \setminus \{0\} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} .$$

3. En déduire, pour $x \in]-R, R[\, \setminus \{0\}$, une expression simple de

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} x^n .$$

4. Montrer que, pour tout n entier naturel,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = \frac{1}{2} \binom{2n+2}{n+1} .$$

5. En utilisant la question **2.**, calculer la somme $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\, 4^n} \binom{2n}{n}$.

PARTIE B. Égalisations au jeu de pile ou face infini.

On considère une répétition infinie de lancers d'une pièce dont la probabilité de tomber sur face à chaque lancer est $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_n l'événement "le n-ième lancer donne face" et on admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les événements $F_1, \cdots, F_n$ sont indépendants.

On admet l'existence d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, F_n est un événement, i.e. $F_n \in \mathcal{A}$, et $P(F_n) = p$.

On pose $A_0 = \Omega$, et on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les événements

A_n: "à l'issue des $2n$ premiers lancers, il y a autant de piles que de faces"

B_n: "à l'issue des $2n$ premiers lancers, il y a pour la première fois autant de piles que de faces". Par exemple, si les six premiers lancers donnent dans l'ordre (face, face, pile, pile, face, pile), A_1 n'est pas réalisé mais A_2 et A_3 le sont, B_2 est réalisé mais B_1 et B_3 ne le sont pas.

Enfin on définit

C: "au bout d'un certain nombre (non nul) de lancers, il y a autant de piles que de faces".

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n et B_n sont bien des événements, i.e. $A_n \in \mathcal{A}$ et $B_n \in \mathcal{A}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la valeur de $P(A_n)$.

7. Montrer que les événements B_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ sont deux à deux incompatibles.

8. Montrer que C est un événement i.e. $C \in \mathcal{A}$, et que $P(C) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n)$.

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, prouver la relation $P(A_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(B_k)\, P(A_{n-k})$.

10. En déduire, par récurrence forte, la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad P(B_n) = \frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1} (pq)^n .$$

11. Dans cette question, on suppose $p \neq \dfrac{1}{2}$. Montrer que $P(C) = 1 - \sqrt{1-4pq}$.

12. Dans cette question, on suppose $p = \dfrac{1}{2}$. Montrer que C est un événement presque sûr.

EXERCICE

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue, telle que l'intégrale généralisée $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ soit convergente.

Pour $a \geq 0$, on pose $\varphi(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at} f(t)\,\mathrm{d}t$, sous réserve de convergence de cette intégrale.

Pour $x \geq 0$, on pose $F(x) = -\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$, que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$, puis que F est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

2. Soit $a > 0$, soit $M \in \mathbb{R}_+$. Montrer que

$$\int_0^M e^{-at} f(t)\,\mathrm{d}t = e^{-aM} F(M) + I + a \int_0^M e^{-at} F(t)\,\mathrm{d}t .$$

3. En déduire que φ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \qquad \varphi(a) = I + a \int_0^{+\infty} e^{-at} F(t)\,\mathrm{d}t .$$

4. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. Montrer que φ est continue en 0. *Pour $a > 0$, on pourra poser $t = \dfrac{u}{a}$ dans une intégrale.*