CORRIGÉ du D.S. de MATHÉMATIQUES numéro 6
PSI2 2025-2026

PROBLÈME 1 *librement inspiré de Centrale PSI 2009*

PARTIE A. Notion de valeur singulière

1. Soit $X \in \mathbb{R}^n$.

Si $AX = 0$, alors $A^\top AX = 0$, d'où l'inclusion $\text{Ker}(A) \subset \text{Ker}(A^\top A)$, soit $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g)$.

Réciproquement, si $A^\top AX = 0$, alors $X^\top A^\top AX = 0$, soit $(AX)^\top AX = 0$, soit $\|AX\|^2 = 0$, et cela entraîne $AX = 0$. On a donc $\text{Ker}(A^\top A) \subset \text{Ker}(A)$, soit $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(f)$.

Finalement, $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$ et, comme ce sont deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$, ils ont alors le même rang par le théorème du rang, soit $\text{rg}(A^\top A) = \text{rg}(A) = r$.

2. Il est immédiat que $(A^\top A)^\top = A^\top A$ et $(AA^\top)^\top = AA^\top$, ce sont des matrices symétriques.

Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $X^\top A^\top AX = \|AX\|^2 \geq 0$, donc $A^\top A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. En rempaçant A par $A^\top$, la matrice symétrique $AA^\top$ est aussi positive.

3. Par le théorème spectral, on sait que la matrice symétrique réelle $A^\top A$ est diagonalisable à l'aide d'une matrice de passage orthogonale, on peut donc écrire $A^\top A = PDP^{-1} = PDP^\top$, avec P orthogonale et $D = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, où les λ_i sont les valeurs propres de $A^\top A$, chacune ayant autant d'occurrences sur la diagonale que sa multiplicité.

On peut écrire de même $AA^\top = QD'Q^\top$, avec Q orthogonale et D' diagonale. Mais l'énoncé nous rappelle que les matrices $A^\top A$ et $AA^\top$ ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités. On peut donc s'arranger pour avoir $D' = D$. *Pour les sceptiques, disons que si l'on diagonalise $A^\top A$ et $AA^\top$ indépendamment avec des matrices de passage orthogonales, bien sûr on ne trouvera pas forcément la même matrice diagonale puisque les valeurs propres, même si elles sont identiques, ne seront pas forcément placées dans le même ordre. Puisque les valeurs propres sont réelles, on peut par exemple s'imposer de les ranger dans l'ordre croissant, on aura ainsi la même réduite diagonale pour $A^\top A$ et pour $AA^\top$.*

4. La matrice diagonale D, semblable à $A^\top A$, a le même rang, à savoir r. Or, pour une matrice diagonale, il est évident que le rang est le nombre de coefficients diagonaux non nuls.

5. Les matrices $A^\top A$ et $(UAV)^\top UAV = V^\top A^\top U^\top UAV = V^{-1}(A^\top A)V$ sont semblables, donc ont les mêmes valeurs propres (positives), avec les mêmes multiplicités. Les valeurs singulières de A et de UAV, qui sont les racines carrées des valeurs propres de $A^\top A$ et de $(UAV)^\top UAV$, sont donc aussi les mêmes.

6. Si A est symétrique réelle, par le théorème spectral, on sait que A est diagonalisable. Notons $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ les valeurs propres (non nécessairement distinctes) de A, alors $A^\top A = A^2$ a pour valeurs propres $\alpha_1^2, \cdots, \alpha_n^2$. Les valeurs singulières de A sont les racines carrées des valeurs propres de $A^\top A$, c'est-à-dire $|\alpha_1|, \cdots, |\alpha_n|$.

En conclusion, les valeurs singulières d'une matrice symétrique réelle sont les valeurs absolues de ses valeurs propres.

PARTIE B. Décomposition en valeurs singulières

7.a. Yaka l'écrire: $\|AX\|^2 = (AX)^\top AX = X^\top(A^\top AX) = (X|A^\top AX)$.

b. Par le théorème spectral, la matrice $A^\top A$ étant symétrique réelle, de valeurs propres $\sigma_1^2, \cdots, \sigma_n^2$, il existe une base orthonormale $(E_1, \cdots, E_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $A^\top AE_i = \sigma_i^2 E_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On décompose le vecteur X dans cette base: $X = \sum_{i=1}^n x_i E_i$. On a alors $A^\top AX = \sum_{i=1}^n x_i \sigma_i^2 E_i$ puis, la base de décomposition étant orthonormale, le produit scalaire de ces deux vecteurs est la somme des produits deux à deux de leurs coordonnées, soit

$$\|AX\|^2 = (X|A^\top AX) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\sigma_i^2\ .$$

En majorant chaque σ_i^2 par σ_n^2, on a donc $\|AX\|^2 \leq \sigma_n^2 \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sigma_n^2\,\|X\|^2$. On minore de la même façon: $\|AX\|^2 \geq \sigma_1^2\,\|X\|^2$. On obtient bien $\sigma_1\|X\| \leq \|AX\| \leq \sigma_n\|X\|$.

c. Pour $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a donc $\sigma_1 \leq \dfrac{\|AX\|}{\|X\|} \leq \sigma_n$. Les réels σ_1 et σ_n sont respectivement un minorant et un majorant de l'ensemble des quotients $\dfrac{\|AX\|}{\|X\|}$ lorsque X décrit $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pour montrer que ce sont le minimum et le maximum, il suffit de vérifier que ces valeurs sont atteintes. Or, si l'on reprend la base orthonormale $(E_1, \cdots, E_n)$ introduite en **b.**, on a, pour tout i, $\|E_i\| = 1$ et $\|AE_i\|^2 = (E_i|A^\top AE_i) = (E_i|\sigma_i^2 E_i) = \sigma_i^2\|E_i\|^2 = \sigma_i^2$. En particulier, $\dfrac{\|AE_1\|}{\|E_1\|} = \sigma_1$ et $\dfrac{\|AE_n\|}{\|E_n\|} = \sigma_n$.

d. Posons $\mathcal{E} = \left\{\dfrac{\|AX\|}{\|X\|}\ ;\ X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right\}$. On a $\mathcal{E} \subset [\sigma_1, \sigma_n]$ par le **c.** ci-dessus.

Par ailleurs, l'application $X \mapsto AX$ de $\mathbb{R}^n$ vers lui-même est continue, car elle est linéaire en dimension finie. La norme étant 1-lipschitzienne donc continue, on a ainsi la continuité de $f : X \mapsto \dfrac{\|AX\|}{\|X\|}$ comme application de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ vers $\mathbb{R}$. L'application "affine" $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ définie par $\psi(t) = (1-t)E_1 + tE_n$ est continue et elle est à valeurs dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (en effet, les vecteurs E_1 et E_n étant linéairement indépendants, $\psi(t)$ ne peut s'annuler que si t et $1-t$ sont simultanément nuls, ce qui est impossible). L'application composée $g = f \circ \psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ est donc continue, et comme $g(0) = f(E_1) = \sigma_1$ et $g(1) = f(E_n) = \sigma_n$, elle prend toutes les valeurs comprises entre σ_1 et σ_n d'après le théorème des valeurs intermédiaires. On a donc $\mathcal{E} = [\sigma_1, \sigma_n]$.

8. La matrice $A^\top A$ étant symétrique réelle, elle est diagonalisable et il existe plus précisément une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres. Ses valeurs propres étant $\lambda_1 = \sigma_1^2, \cdots, \lambda_n = \sigma_n^2$ (comptées avec leur multiplicité), on peut trouver une base orthonormale $\mathcal{B}_1 = (X_1, \cdots, X_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $A^\top AX_i = \lambda_i X_i$ pour tout i.

9. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a alors

$$(Y_i|Y_j) = Y_i^\top Y_j = \frac{1}{\sigma_i\sigma_j} X_i^\top A^\top AX_j = \frac{1}{\sigma_i\sigma_j} X_i^\top \sigma_j^2 X_j = \frac{\sigma_j}{\sigma_i}(X_i|X_j)\ .$$

Comme $(X_i|X_j) = \delta_{i,j}$, on obtient aussi $(Y_i|Y_j) = \delta_{i,j}$. Donc $\mathcal{B}_2 = (Y_1, \cdots, Y_n)$ est une famille orthonormale, elle est donc libre et, comme elle est de cardinal n, c'est aussi une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

10. De $f(X_i) = AX_i = \sigma_i Y_i$, on déduit immédiatement que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) = \mathrm{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$, notons D cette matrice diagonale.

11. Les formules de changement de base donnent (*faire un diagramme)*:

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_0}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_0}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})\ ,$$

soit $A = UDV$ avec $U = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_0}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_2}$ et $V = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_0}$. Les matrices U et V sont des matrices de passage entre deux bases orthonormales, ce sont donc des matrices orthogonales.

12. On calcule $M = A^\top A = \begin{pmatrix} 125 & 75 \\ 75 & 125 \end{pmatrix}$. Donc $\chi_M = (X-125)^2 - (75)^2 = (X-200)(X-50)$.

Les valeurs propres de $A^\top A$ sont donc 50 et 200, les valeurs singulières de A sont les racines carrées de ces nombres, soit $\sigma_1 = 5\sqrt{2}$ et $\sigma_2 = 10\sqrt{2}$. La base orthonormale $\mathcal{B}_1 = (X_1, X_2)$ des questions précédentes doit être constituée de vecteurs propres unitaires de $M = A^\top A$, recherchons donc ces derniers.

Comme $M - 50I_2 = \begin{pmatrix} 75 & 75 \\ 75 & 75 \end{pmatrix}$, un vecteur propre unitaire de M pour la valeur propre 50 est $X_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ensuite, $Y_1 = \dfrac{1}{\sigma_1} A X_1 = \dfrac{1}{5\sqrt{2}} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -5 & -11 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Comme $M - 200I_2 = \begin{pmatrix} -75 & 75 \\ 75 & -75 \end{pmatrix}$, un vecteur propre unitaire de M pour la valeur propre 200 est $X_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ensuite, $Y_2 = \dfrac{1}{\sigma_2} A X_2 = \dfrac{1}{10\sqrt{2}} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -5 & -11 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Notons $\mathcal{B}_2$ la base orthonormale (Y_1, Y_2), *on vérifie facilement que c'est bien une BON*, on a alors d'après la question **11.** la relation $A = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_2} \cdot \Delta \cdot \left(P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1}\right)^\top$ avec $\Delta = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2)$. Cela donne l'égalité

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -11 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 10\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

que le lecteur se fera un plaisir de vérifier!

PROBLÈME 2 *d'après Centrale PC 2023*

A. Calculs utilisant des séries entières.

1. En posant $a_n = \dbinom{2n}{n}$, on a $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(2n+2)!}{\big((n+1)!\big)^2} \times \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} = \dfrac{2(2n+1)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4$, d'où un rayon de convergence R égal à $\dfrac{1}{4}$.

Pour $x \in I =]-R, R[$, posons $s(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On vient d'obtenir entre les coefficients a_n la relation $(n+1)a_{n+1} = 2(2n+1)a_n$. En multipliant cette relation par x^n, et en sommant ensuite pour n de 0 à l'infini, toutes les séries entières entrant en jeu ayant le même rayon de convergence $R = \dfrac{1}{4}$, on obtient

$$\forall x \in I \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = 4\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \ ,$$

soit $s'(x) = 4x\, s'(x) + 2\, s(x)$, autrement dit la fonction s est solution sur l'intervalle de convergence I de l'équation différentielle linéaire du premier ordre **(E)** : $(1-4x)y' - 2y = 0$. Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions $y = \dfrac{C}{\sqrt{1-4x}}$. Avec la condition initiale $s(0) = a_0 = 1$, on obtient

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[\qquad s(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}\ .$$

Remarque. La réponse étant donnée, on peut aussi partir de $\dfrac{1}{\sqrt{1-4x}} = (1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ et développer cette expression en série entière en utilisant le développement au programme de $(1+t)^\alpha$ pour $t \in]-1, 1[$.

2. On sait que l'on peut primitiver terme à terme la fonction somme d'une série entière sur son intervalle de convergence, on a donc

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[\qquad \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{n+1}}{n+1}\ .$$

Pour x non nul dans I, il suffit de diviser par x les deux membres de l'égalité obtenue.

3. Le lecteur averti (qui en vaut deux) aura reconnu un produit de Cauchy. En posant $a_k = \dbinom{2k}{k}$ et $b_k = \dfrac{1}{k+1}\dbinom{2k}{k}$, les séries entières $\sum a_k x^k$ et $\sum b_k x^k$ ont pour rayon de convergence commun $R = \dfrac{1}{4}$ et, si l'on pose $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$, la série entière produit de Cauchy $\sum c_n x^n$ a un rayon de convergence au moins égal à $\dfrac{1}{4}$ et, pour tout $x \in]-R, R[$, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k\right)\left(\sum_{l=0}^{+\infty} b_l x^l\right) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x\sqrt{1-4x}} = \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1\right) = \frac{s(x)-1}{2x}$$

(en toute rigueur pour x non nul, mais on prolonge par continuité avec la valeur 1 en 0), en posant $s(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}$ comme on l'a déjà fait dans le corrigé de **Q1.**

4. On redéveloppe le résultat obtenu ci-dessus: pour $x \in \left]-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right[\setminus \{0\}$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \frac{1}{2x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n} x^n - 1\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{2n}{n} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1} x^n\ ,$$

l'égalité entre les membres extrêmes étant valable aussi pour $x = 0$. Par unicité du développement en série entière, on déduit la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = \frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}\ .$$

5. Posons $u_n(x) = b_n x^n = \dbinom{2n}{n} \dfrac{x^n}{n+1}$ pour $x \in S = \left[-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right]$, on a alors, en utilisant la formule de Stirling,

$$\|u_n\|_{\infty,S} = \frac{1}{4^n(n+1)} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\,4^n} \frac{2\sqrt{\pi n}\,\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,n^{3/2}}$$

qui est sommable, ceci prouve la convergence normale sur le segment $S = [-R, R]$ de la série de fonctions $\sum u_n$. Les fonctions u_n étant continues, la fonction somme est alors continue sur S, et notamment continue à gauche au point $R = \dfrac{1}{4}$, d'où, en utilisant **Q2.**,

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\,4^n} \binom{2n}{n} = \lim_{x\to\left(\frac{1}{4}\right)^-} \left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right) = 2\ .$$

B. Égalisations au jeu de pile ou face infini.

6. On reconnaît ici la situation appelée "schéma de Bernoulli", i.e. une répétition de $2n$ épreuves de Bernoulli indépendantes avec à chaque épreuve une probabilité de succès (obtenir "face") égale à p. La probabilité d'avoir k succès, avec $k \in [\![0, 2n]\!]$, lors de cette répétition, est $\dbinom{2n}{k} p^k q^{2n-k}$ (on reconnaît une loi binomiale de paramètres $2n$ et p si l'on veut formaliser en termes de variable aléatoire), en particulier

$$P(A_n) = \binom{2n}{n} p^n\, q^n\ .$$

7. Bah c'est évident, il n'y a jamais deux premières fois!

8. On a $C = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n$, donc C est une réunion dénombrable d'événements, c'est aussi un événement, i.e. $C \in \mathcal{A}$. Comme cette réunion est disjointe, il résulte de la propriéte de σ-additivité d'une probabilité que $P(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n)$.

9. Clairement, on a $A_n = \bigsqcup_{k=1}^{n} (B_k \cap A_n)$, puis

$$P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k \cap A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k)\cdot P_{B_k}(A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k)\ P(A_{n-k})\ .$$

En effet, si l'on sait l'événement B_k réalisé (égalisation après $2k$ lancers), la probabilité (conditionnelle) d'une nouvelle égalisation après $2(n-k)$ nouveaux lancers est la même que la probabilité d'une égalisation après les $2(n-k)$ premiers lancers, soit $P_{B_k}(A_n) = P(A_{n-k})$. Ce raisonnement est valable pour $k = n$ avec la convention $A_0 = \Omega$.

10. Pour $n=1$, on a $B_1 = (F_1 \cap \overline{F_2}) \sqcup (\overline{F_1} \cap F_2)$, donc

$$P(B_1) = 2pq = \frac{2}{1}\binom{0}{0}(pq)^1 ,$$

la formule est exacte pour $n=1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, supposons la formule vraie pour tout rang $k \in [\![1, n-1]\!]$. Comme $P(A_0) = P(\Omega) = 1$, de la relation obtenue en **Q9.**, on déduit

$$\begin{aligned}
P(B_n) &= P(A_n) - \sum_{k=1}^{n-1} P(B_k)\,P(A_{n-k}) \\
&= \binom{2n}{n} p^n\, q^n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{k}\binom{2k-2}{k-1} p^k q^k \binom{2n-2k}{n-k} p^{n-k} q^{n-k} \\
&= (pq)^n \left[\binom{2n}{n} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{k}\binom{2k-2}{k-1}\binom{2n-2k}{n-k}\right] \\
&= (pq)^n \left[\binom{2n}{n} - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{2}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k-2}{n-k-1}\right] && \textbf{(*)} \\
&= (pq)^n \left[\binom{2n}{n} - 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2(n-1)-2k}{(n-1)-k} + \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}\right] && \textbf{(**)} \\
&= (pq)^n \left[\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n} + \frac{2}{n}\binom{2(n-1)}{n-1}\right] && \textbf{(***)} \\
&= \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}(pq)^n ,
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. La récurrence est donc achevée.

Quelques commentaires sur le calcul.

(*): *translation d'indice*

(**): *on ajoute et retranche le terme d'indice $k = n-1$*

(***): *on utilise la relation obtenue en* **Q4.** *avec n remplacé par $n-1$.*

11. Si $p \neq \frac{1}{2}$ (pièce déséquilibrée), alors $pq = p(1-p) < \frac{1}{4}$ (*calcul classique, étudier la fonction $p \mapsto p(1-p)$, ou bien utiliser des identités remarquables*). Des questions **8.** et **2.**, on déduit alors que

$$P(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}(pq)^n = 2pq\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}(pq)^n = 2pq \times \frac{1-\sqrt{1-4pq}}{2pq} .$$

La probabilité qu'au moins une égalisation se produise au cours de la partie est donc

$$P(C) = 1 - \sqrt{1-4pq} .$$

12. Si $p = \dfrac{1}{2}$ (pièce équilibrée), on déduit de **Q5.** que

$$P(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{2}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\,4^n} \binom{2n}{n} = \frac{S}{2} = 1\ .$$

Il est presque sûr qu'au moins une égalisation se produira au cours de la partie.

EXERCICE

1. L'intégrale généralisée I étant convergente, on a $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - I$ par la relation de Chasles et, d'après le théorème fondamental, comme f est continue, F est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$, i.e. F est de classe $\mathcal{C}^1$ et $F' = f$. Il est alors immédiat que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = I - I = 0$.
La fonction F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et admet une limite finie en $+\infty$, donc elle est bornée sur $\mathbb{R}_+$. *En effet, puisque* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$*, elle est bornée "au voisinage de* $+\infty$*", c'est-à-dire sur un intervalle de la forme* $[A, +\infty[$ *avec* $A \in \mathbb{R}_+$*. Par ailleurs, sur le segment* $[0, A]$*, la fonction continue* F *est bornée par le théorème des bornes atteintes.*

2. Comme F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, il suffit d'intégrer par parties, et de tenir compte de $F(0) = -I$.

3. La fonction φ est définie en 0 et $\varphi(0) = I$ par hypothèse.
Montrons que $\varphi(a)$ est bien défini pour tout $a > 0$. Puisque F est bornée sur $\mathbb{R}_+$, $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} e^{-aM}\,F(M) = 0$ et la fonction $t \mapsto e^{-at}\,F(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^M e^{-at}\,f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque M tend vers $+\infty$, qui est $I + a\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\,F(t)\,\mathrm{d}t$, c'est ce qu'il fallait démontrer.

4. Posons $g(a,t) = e^{-at}\,F(t)$, l'application partielle $a \mapsto g(a,t)$ est alors de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ avec $\dfrac{\partial^k g}{\partial a^k}(a,t) = (-1)^k t^k\,e^{-at}\,F(t)$. Si on fixe $A > 0$, alors

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall (a,t) \in [A, +\infty[\times\mathbb{R}_+ \qquad \left|\frac{\partial^k g}{\partial a^k}(a,t)\right| \le \|F\|_\infty\, t^k\, e^{-At}\ ,$$

cette fonction de la variable t étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Par applications répétées du théorème de dérivation des intégrales à paramètre, on peut affirmer que la fonction $t \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} F(t)e^{-at}\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De la relation obtenue en **3.**, on déduit que φ est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. De **3.**, on tire $\varphi(a) - \varphi(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\,F(t)\,a\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-u}\,F\Big(\frac{u}{a}\Big)\,\mathrm{d}u$ pour $a > 0$.

Pour $u > 0$ fixé, on a $\displaystyle\lim_{a\to0^+} e^{-u}\,F\Big(\frac{u}{a}\Big) = 0$ puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

On a par ailleurs la domination

$$\forall (a,u) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \qquad \left| e^{-u}\, F\left(\frac{u}{a}\right) \right| \leq \|F\|_\infty\, e^{-u}\ ,$$

cette fonction de la variable u étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Le théorème de convergence dominée à paramètre continu permet donc d'affirmer que $\displaystyle\lim_{a\to 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-u}\, F\left(\frac{u}{a}\right)\, \mathrm{d}u = 0$, soit $\displaystyle\lim_{a\to 0^+} \varphi(a) = \varphi(0)$, et φ est donc continue en 0.

Le lecteur aura reconnu une étude de la transformée de Laplace de f. En fait,quitte à faire une translation de la "variable de Laplace" a, on a montré le résultat suivant : si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux, si pour un réel α donné, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\, f(t)\, \mathrm{d}t$ est convergente, alors la transformée de Laplace de f est définie et continue sur la demi-droite fermée $[\alpha, +\infty[$, et elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur la demi-droite ouverte $]\alpha, +\infty[$.