DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES numéro 6
COMMENTAIRES
PSI2 2025-2026

PROBLÈME 1

1. Quelques erreurs dans l'écriture du théorème du rang, j'ai lu sur quelques copies que

$$\dim\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big) = \mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}\, f)\ ,$$

j'espère qu'il s'agit d'un lapsus et que personne ne pense vraiment que f et g sont des endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$! D'ailleurs l'espace de départ était précisé dans l'énoncé!

3. Pour expliquer que c'est la même matrice diagonale qui intervient dans les deux formules, il faut dire que $A^\top A$ et $AA^\top$ ont les mêmes valeurs propres, mézôssi **avec les mêmes multiplicités**, ce qui résulte de l'égalité des polynômes caractéristiques.

7.b. Question très classique, mais pas toujours bien traitée. En effet, il y a essentiellement deux façons de présenter les choses, qui correspondent à ce que j'avais appelé les "versions 1 et 2" du théorème spectral:

- soit on dit qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}_1 = (X_1, \cdots, X_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de $A^\top A$ (c'est par exemple celle qui est introduite dans la question **8.**, ce qui fait que ces questions sont effectivement un peu redondantes), mais dans ce cas un vecteur quelconque X de $\mathbb{R}^n$ a des coordonnées dans cette base, il ne s'écrit donc pas $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ mais plutôt $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$, où les α_i sont ses **coordonnées** dans la base $\mathcal{B}_1$;

- soit on dit que $\mathbb{R}^n$ est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres de $A^\top A$, mais dans ce cas il n'y a pas forcément n valeurs propres distinctes, l'écriture correcte est alors $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} X_i$, où m est le nombre de valeurs propres distinctes, et les X_i sont les **composantes** du vecteur X selon la décomposition $\mathbb{R}^n = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{m} E_{\lambda_i}(A^\top A)$, où $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ sont les valeurs propres **distinctes** de $A^\top A$ (c'est-à-dire de g).

L'énoncé, en introduisant les valeurs singulières $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$, dirigeait plutôt vers la première écriture, mais dans tous les cas il est important ici de bien **introduire les notations que vous allez utiliser**.

11. Des cafouillages dans les changements de base et les matrices de passage, c'était prévisible. Même s'il y a des erreurs sur l'ordre dans lequel doivent figurer les matrices de passage, ce n'est pas bien grave, l'essentiel est d'avoir compris que l'on passe à chaque fois d'une BON à une BON (donc U et V sont des matrices orthogonales).

PROBLÈME 2

1. C'est un peu décourageant de voir que vous êtes très peu nombreux à savoir mener à bien le développement en série entière de $\dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}$ en partant de celui du cours de $(1+x)^{\alpha}$.

3. Ici, je voudrais voir écrit en toutes lettres: "**produit de Cauchy**"!

Toute autre interversion de sommations, type Fubini, est hors programme!

5. La formule obtenue en **Q2.** a été démontrée pour x tel que $|x| < \dfrac{1}{4}$. Est-elle encore valable pour $x = \dfrac{1}{4}$? Pour le savoir, il est nécessaire d'étudier la continuité de la fonction somme d'une série entière en une borne de son intervalle de convergence, et aucun théorème du programme ne mentionne de tel résultat de façon générale. Il faut donc se retrousser les manches et prouver la convergence normale sur $[-R, R]$, *cf.* corrigé.

6. Un minimum d'explication est nécessaire.

7. Merci de ne pas remplir une page juste pour dire qu'il n'y a jamais deux premières fois!!!

9. Il est faux d'écrire que $A_n = \bigsqcup_{k=1}^{n} (B_k \cap A_{n-k})$, et aussi de prétendre que les événements B_k et A_{n-k} sont indépendants (*il y a des lancers de pièce communs entre B_k et A_{n-k}, bon je me comprends...*) La bonne écriture est $A_n = \bigsqcup_{k=1}^{n} (B_k \cap A_n)$ puisqu'il est clair que, si A_n est réalisé, alors un et un seul des B_k $(1 \leq k \leq n)$ est réalisé, on utilise alors des probabilités conditionnelles, *cf.* corrigé.

12. Il ne s'agit pas ici de simplement appliquer le résultat obtenu en **Q 11.** avec $p = q = \dfrac{1}{2}$, comment le justifier ? Il faut dans ce cas utiliser **Q5.** qui donne la valeur de la somme de la série entière en un point extrémité de son intervalle de convergence.

EXERCICE

1. Il y a quelques très bonnes rédactions de cette question sur certaines copies, mais elles sont plutôt rares. Pourtant, il s'agit de choses qui ont été rabâchées, rabâchées...

Le théorème fondamental de l'analyse concerne des fonctions s'écrivant sous la forme $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ avec f continue sur I et $a \in I$, le cas où la "borne fixe" est infinie peut s'y ramener grâce à la relation de Chasles (*cf.* corrigé) si l'on connaît la convergence de l'intégrale généralisée, mais c'est à rédiger!

L'écriture $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = -\int_{+\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ n'est pas convaincante, à rédiger autrement!

Enfin, le caractère borné d'une fonction continue sur $[0, +\infty[$ ayant une limite finie en $+\infty$ n'est pas un résultat du programme! À vous de vous ramener au théorème des bornes atteintes sur un segment, cela nécessite un peu de rédaction.

Une dernière chose: l'énoncé ne prétend pas que la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, mais seulement que l'intégrale généralisée est convergente (et non pas **absolument** convergente), ce n'est pas la même chose.

3. Il s'agissait ici essentiellement de justifier que l'on pouvait faire tendre la borne M vers $+\infty$ dans le résultat de l'hipépé de la question **2.**, autrement dit il fallait montrer la convergence (qui est absolue, celle-ci) de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\, F(t)\, \mathrm{d}t$ pour tout $a > 0$. Sachant que F est bornée sur $\mathbb{R}_+$, c'est facile.

4. Que d'erreurs pour dériver l'expression $e^{-at}\, F(t)$ par rapport au paramètre a. En effet, $\dfrac{\partial^k}{\partial a^k}(e^{-at}) = (-t)^k\, e^{-at}$, et non pas $(-a)^k\, e^{-at}$.
Il y a encore quelques erreurs sur la notion même de "domination", mais c'est "moins pire" que dans le dernier DM.

Prolongement. Tiens, s'il y en a que ça intéresse, je signale qu'en prenant pour f la fonction sinus cardinal, à savoir $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ prolongée par continuité en 0, les hypothèses de l'énoncé sont satisfaites, l'intégrale I est en effet (semi-)convergente, la transformée de Laplace φ se calcule facilement sur $\mathbb{R}_+^*$ par une dérivation par rapport à la variable de Laplace a, et la question **5.** permet de retrouver la valeur de l'intégrale de Dirichlet: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.