CAHIER de TEXTES MATHÉMATIQUES
PSI2 2025-2026

Lundi 1er septembre 2025, de 13h30h à 16h

Accueil des étudiants, puis...

Lecture du poly sur les suites numériques, approfondissement sur les suites définies par une récurrence linéaire d'ordre deux. Notion de limite. Suites réelles: limites et inégalités, théorème de la limite monotone, suites adjacentes. Exemples et exercices.

Pour mercredi 3 septembre: exos 4, 6, 8 et 9 de la feuille "suites" + exo 3 du poly de cours.

Mercredi 3 septembre 2025, de 8h à 10h

Correction de l'exo 3 du poly de cours.

Révisions de calcul asymptotique sur les suites.

TD classe entière (10h-11h30): exos 4, 6 et 8 de la feuille "suites".

Pour jeudi 4 septembre: exos 2, 12, 14 et 22(a, b) de la feuille "suites".

Jeudi 4 septembre 2025, de 10h à 12h

Notions sur les séries (convergence, sommes partielles, somme et restes en cas de convergence). Propriétés: linéarité de la somme, condition nécessaire pour qu'une série converge, exemple des séries géométriques, lien entre suites et séries (série télescopique associée à une suite).

TD groupe A (13h-14h30): exos 2, 12 et 22 de la feuille "suites".

TD groupe B (14h30- 16h): exos 2, 14 et 22 de la feuille "suites".

Pour lundi 8 septembre: exos 5 et 18 de la feuille "suites".

Lundi 8 septembre 2025, de 10h à 13h

Séries à termes positifs: conventions de calcul dans $[0, +\infty]$, CNS de convergence (les sommes partielles sont majorées), séries de référence (séries géométriques et séries de Riemann), théorèmes de comparaison. Règle de Riemann, règle de d'Alembert. Comparaison série-intégrale.

Correction des exercices 5 et 18a. de la feuille "suites".

Pour mercredi 10 septembre: exos 1 (a,b,c), 6 et 8 de la feuille "séries".

Mercredi 10 septembre 2025, de 8h à 10h

Séries à termes "quelconques": convergence absolue, elle entraîne la convergence.

Théorème spécial des séries alternées avec signe et majoration du reste en valeur absolue, exemples de séries semi-convergentes.

TD groupe B (10h-11h30): exos 1 et 6 de la feuille "séries" + début de l'exo 22.

TD groupe A (11h30-13h): exos 1, 6 et 8 de la feuille "séries".

Pour jeudi 11 septembre: exos 10, 13 et 16 de la feuille "séries".

Jeudi 11 septembre 2025, de 10h à 12h

Propriétés de $\mathbb{N}$ (toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum), principe de récurrence.

Notions d'ensemble dénombrable, d'ensemble au plus dénombrable, énumération. Les ensembles $\mathbf{Z}$, $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. Tout produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable. Les ensembles $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas dénombrables. Toute union au plus dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

TD groupe B (13h-14h30): exos 13 et 16 de la feuille "séries".

TD groupe A (14h30- 16h): idem.

Pour lundi 15 septembre: exos 22, 24 et 25 de la feuille "séries".

Samedi 13 septembre 2025, de 8h à 12h

DS 1 (durée: 4 heures): méthodes de Héron et de Newton + intégrales de Wallis, formule de Stirling et calcul de $\zeta(2)$.

Lundi 15 septembre 2025, de 10h à 13h

Formule de Stirling. Produit de Cauchy de deux séries numériques. Rappel sur les différentes formules de Taylor. La série exponentielle. Quelques mots sur les suites sommables, notamment toute série **absolument** convergente est "commutativement convergente", somme sur une partie de $\mathbb{N}$, sommation par paquets.

Lecture du début du poly sur l'algèbre linéaire de 1ère année: structure d'espace vectoriel, sous-espaces, sous-espace engendré par une famille de vecteurs, familles (finies) libres, génératrices, bases. Somme de deux sous-espaces, somme directe, supplémentaires. Théorie de la dimension. Rang d'une famille de vecteurs. Formule de Grassmann.

Pour mercredi 17 septembre: exos 4, 6, 7 et 8 de la feuille "algèbre linéaire".

Pour jeudi 25 septembre: DM 1

Mercredi 17 septembre 2025, de 8h à 10h

Lecture du poly sur l'algèbre linéaire de 1ère année: applications linéaires, noyau et image, endomorphismes, isomorphismes, automorphismes, groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$, détermination d'une application linéaire (par l'action sur une base, par l'action sur deux supplémentaires), projecteurs et symétries, théorème du rang et sa "forme géométrique", équations linéaires.

TD groupe A (10h-11h30): exos 4, 6 et 8 de la feuille "algèbre linéaire".

TD groupe B (11h30-13h): idem.

Pour jeudi 18 septembre: exos 10, 11, 13 et 16 de la feuille "algèbre linéaire".

Jeudi 18 septembre 2025, de 10h à 12h

Produit cartésien d'un nombre fini d'espaces vectoriels, dimension.

Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels de E, somme directe, décomposition de E en somme directe de s.e.v qualifiés alors de "supplémentaires", en dimension finie $\dim\left(\sum_{i=1}^{m} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m} \dim(E_i)$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.

TD groupe A (13h-14h30): exos 11, 13 et 16b. de la feuille "algèbre linéaire".

TD groupe B (14h30- 16h): exos 10, 13 et 16b. de la feuille "algèbre linéaire".

Pour lundi 22 septembre: exos 25 et 26 de la feuille "algèbre linéaire".

Lundi 22 septembre 2025, de 10h à 13h

Base adaptée à un sous-espace vectoriel de E (dimension finie), ou à une décomposition de E en somme directe de m sous-espaces. Décomposition en somme directe obtenue par partition d'une base.

Formes linéaires, hyperplans: exemple des formes linéaires coordonnées relativement à une base, définition d'un hyperplan comme noyau d'une forme linéaire non nulle, caractérisation comme sous-espace admettant comme supplémentaire une droite. Hyperplans en dimension finie, équations cartésiennes dans une base. Dimension de l'espace des solutions d'un système linéaire homogène.

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, matrices élémentaires $E_{i,j}$, relation $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$.

Relations $E_iE_j^\top = E_{i,j}$ et $E_i^\top E_j = \delta_{i,j}$, ainsi que $C_j(A) = AE_j$, $L_i(A) = E_i^\top A$ et $a_{i,j} = E_i^\top AE_j$. Matrices diagonales, triangulaires, symétriques, antisymétriques. Matrices inversibles. Transposition.

Pour mercredi 24 septembre: exos 20, 21, 41 et 46 de la feuille "algèbre linéaire".

Mercredi 24 septembre 2025, de 8h à 10h

Lecture du poly sur le calcul matriciel: représentation d'une application linéaire par une matrice, application linéaire canoniquement associée à une matrice, matrices de passage et changements de bases, matrices carrées semblables.

Matrices définies par blocs, opérations, matrices diagonales ou triangulaires par blocs.

Sous-espace stable par un endomorphisme, notion d'endomorphisme induit. Lien entre sous-espaces stables et matrices diagonales ou triangulaires par blocs.

TD groupe B (10h-11h30): exos 20, 21 et 41 de la feuille "algèbre linéaire".

TD groupe A (11h30-13h): exos 21, 41 et 46 de la feuille "algèbre linéaire".

Pour jeudi 25 septembre: exos 27, 28, 30 et 37 de la feuille "algèbre linéaire".

Jeudi 25 septembre 2025, de 10h à 12h

Si deux endomorphismes commutent, alors le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre.

Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme en dimension finie.

Polynômes d'endomorphismes ou de matrices, définitions, opérations. Polynômes annulateurs.

TD groupe B (13h-14h30): exos 27 et 37 de la feuille "algèbre linéaire".

TD groupe A (14h30- 16h): idem.

Pour lundi 29 septembre: exos 33, 47 et 50 de la feuille "algèbre linéaire".

Lundi 29 septembre 2025, de 10h à 13h

Utilisation des polynômes annulateurs: calcul de l'inverse d'une matrice, des puissances d'une matrice. Exercice 47 de la feuille "algèbre linéaire".

Fonctions continues par morceaux sur un segment, définition, propriétés. Construction de l'intégrale d'une telle fonction (d'abord à valeurs réelles, puis à valeurs complexes), propriétés.

Théorème fondamental de l'analyse, étude de fonctions de la forme $x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$, formule d'intégration par parties, formule du changement de variable.

Pour mercredi 1er octobre: exos 6, 7 et 10 de la feuille "fonctions convexes, fonctions intégrables".

Mercredi 1er octobre 2025, de 8h à 10h

Fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque.

Intégrales généralisées sur $[a, +\infty[$, définition. Intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.
Cas des fonctions positives: l'intégrale est convergente si et seulement si les intégrales partielles sont majorées, règle de comparaison avec $0 \leq f \leq g$.
Adaptation à un intervalle de la forme $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$.

TD groupe A (10h-11h30): exos 6 et 10 de la feuille "fonctions convexes, fonctions intégrables".

TD groupe B (11h30-13h): exos 6, 7 et 10 de la feuille "fonctions convexes, fonctions intégrables".

Pour jeudi 2 octobre: exos 1, 2, 17 (I_1) et 18 (I_1 et I_2) de la feuille "fonctions convexes, fonctions intégrables".

Jeudi 2 octobre 2025, de 10h à 12h

Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $]a, b]$ avec $-\infty \leq a < b < +\infty$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.

Cas des intégrales "faussement généralisées". Intégrales sur $]a, b[$.

Propriétés des intégrales généralisées: linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.

Changement de variable et intégration par parties dans des intégrales généralisées.

TD groupe A (13h-14h30): exos 1, 2, 17 (I_1), 18 (I_2) de la feuille "fonctions convexes, fonctions intégrables".

TD groupe B (14h30- 16h): idem.

Pour lundi 6 octobre: exos 14, 15 et 19 de la feuille "fonctions convexes, fonctions intégrables".

Samedi 4 octobre 2025, de 8h à 12h

DS 2 (durée: 4 heures): un exo d'algèbre linéaire + un exo sur les séries + problème (opérateurs de translation et de différence dans $\mathbb{R}_n[X]$ et polynômes de Hilbert).

Lundi 6 octobre 2025, de 10h à 13h

Intégrales généralisées absolument convergentes, la convergence absolue entraîne la convergence. Un exemple d'intégrale semi-convergente: l'intégrale de Dirichlet. Fonction intégrable sur un intervalle, exemple des fonctions de référence. Invariance par translation ou symétrie. Théorèmes de comparaison, notamment "toute fonction majorée en module par une fonction intégrable est intégrable", pratique des études locales aux bornes.

Pour mercredi 8 octobre: exos 22, 25, 27 et 30 de la feuille "fonctions convexes, fonctions intégrables".

Pour jeudi 16 octobre: DM 2

Mercredi 8 octobre 2025, de 8h à 10h

Théorème de stricte positivité.

Espaces vectoriels $L^1(I, \mathbb{K})$ et $L^2_c(I, \mathbb{R})$, produit scalaire et norme associée sur ce dernier, inégalité de Cauchy-Schwarz.

Suites de fonctions: définition de la convergence simple. Exemples. La convergence simple ne conserve pas la continuité des fonctions et n'autorise pas à intervertir limite et intégrale sur un segment.

TD groupe B (10h-11h30): exos 22, 27 et 30 de la feuille "fonctions convexes, fonctions intégrables".

TD groupe A (11h30-13h): exos 22, 25 et 27 de la feuille "fonctions convexes, fonctions intégrables".

Pour jeudi 9 octobre: exos 28, 29 et 34 de la feuille "fonctions convexes, fonctions intégrables".

Jeudi 9 octobre 2025, de 10h à 12h

Introduction de la notation $\|f\|_\infty$, convergence uniforme. Exemples. Idée de majoration uniforme. Cas de la convergence uniforme sur tout segment.

Régularité de la limite d'une suite de fonctions: théorème de continuité.

TD groupe B (13h-14h30): exos 16, 29 et 34 de la feuille "fonctions convexes, fonctions intégrables".

TD groupe A (14h30- 16h): exos 16, 28 et 29 de la feuille "fonctions convexes, fonctions intégrables".

Pour lundi 13 octobre: exos 1, 2 et 7 de la feuille "suites et séries de fonctions".

Lundi 13 octobre 2025, de 10h à 13h

Théorème d'interversion limite-intégrale sur un segment. Théorème de dérivation (classe $\mathcal{C}^1$) de la limite d'une suite de fonctions, extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Séries de fonctions: convergence simple, convergence uniforme, convergence normale. La convergence normale entraîne la convergence uniforme, la réciproque est fausse (contre-exemple).

Contrôle 1 sur la notion d'intégrabilité (30 minutes).

Pour mercredi 15 octobre: exos 1, 2, 7, 11 et 14 de la feuille "suites et séries de fonctions".

Mercredi 15 octobre 2025, de 8h à 10h

Théorèmes concernant la régularité de la somme d'une série de fonctions: continuité, intégration terme à terme sur un segment, dérivabilité avec extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, théorème de la double limite (*admis*).

TD groupe A (10h-11h30): exos 1, 2 et 14 de la feuille "suites et séries de fonctions".

TD groupe B (11h30-13h): idem.

Pour jeudi 16 octobre: exos 10, 15 et 17 de la feuille "suites et séries de fonctions".

Jeudi 16 octobre 2025, de 10h à 12h

Rappels sur les opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes d'une matrice, intérprétation en termes de produit matriciel, conservation du rang. Algorithme du pivot de Gauss, algorithme de Gauss-Jordan pour inverser une matrice carrée (inversible!). Complexité de l'algorithme.

Lecture du poly (début) sur les déterminants: déterminant d'une famille de n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n rapporté à une base, déterminant d'un endomorphisme en dimension finie, déterminant d'une matrice carrée. Définitions et propriétés générales.

Effet des opérations élémentaires sur le déterminant d'une matrice, cofacteurs, développement par rapport à une ligne ou une colonne.

Déterminant de Vandermonde.

TD groupe A (13h-14h30): exos 15 et 17 de la feuille "suites et séries de fonctions".

TD groupe B (14h30- 16h): idem.

Pour lundi 3 novembre: exos 16 et 23 de la feuille "suites et séries de fonctions" + exos 1, 3, 5, 6, 8 et 11 de la feuille "déterminants".

VACANCES de TOUSSAINT

Lundi 3 novembre 2025, de 10h à 13h

Polynômes d'interpolation de Lagrange, lien avec le déterminant de Vandermonde.
Déterminants de matrices triangulaires par blocs.

Définition des vecteurs propres et des valeurs propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Un vecteur x non nul est vecteur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$ si et seulement si la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par u. Définition d'une valeur propre, caractérisation par: $u - \lambda\,\mathrm{id}_E$ non injectif.

Correction de l'exo 16 de la feuille "suites et séries de fonctions".

Pour mercredi 5 novembre: exos 1, 3, 5, 6, 8, 11 et 13 de la feuille "déterminants" + exo 2 de la feuille "réduction des endomorphismes".

Pour jeudi 13 novembre: DM 3

Mercredi 5 novembre 2025, de 8h à 10h

Spectre en dimension finie, valeurs propres d'une matrice carrée.

Si E est **de dimension finie**, alors

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \iff u - \lambda \, \mathrm{id}_E \notin \mathrm{GL}(E) \iff \det(\lambda \, \mathrm{id}_E - u) = 0 \, .$$

Sous-espaces propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Si deux endomorphismes commutent, les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre. Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)\, x$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$. Conséquence: si P est un polynôme annulateur de u, alors les valeurs propres de u sont racines de P. Exemples.

TD groupe B (10h-11h30): exos 3, 5 et 13 de la feuille "déterminants".

TD groupe A (11h30-13h): exos 1, 5 et 6 de la feuille "déterminants".

Pour jeudi 6 novembre: exos 2, 3 et 8 de la feuille "réduction des endomorphismes".

Jeudi 6 novembre 2025, de 10h à 12h

Les sous-espaces propres sont en somme directe. Conséquences: en dimension finie n, $\mathrm{Card}\big(\mathrm{Sp}(u)\big) \leq n$ et $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim\big(E_\lambda(u)\big) \leq n$. Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Polynôme caractéristique d'une matrice carrée d'ordre n, écriture

$$\chi_A = X^n - \mathrm{tr}(A)\, X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \, \det(A) \, .$$

Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire.

Les valeurs propres sont exactement les racines du polynôme caractéristique.

TD groupe B (13h-14h30): exos 2, 3 et 8 de la feuille "réduction des endomorphismes".

TD groupe A (14h30- 16h): exos 2 et 3 de la feuille "réduction des endomorphismes".

Pour lundi 10 novembre: exos 10, 12 et 13 de la feuille "réduction des endomorphismes".

Samedi 8 novembre 2025, de 8h à 12h

DS 3 (durée: 4 heures): un exercice sur les séries de fonctions + problème sur la décomposition LU.

Lundi 10 novembre 2025, de 10h à 13h

Polynôme caractéristique de deux matrices semblables, d'une transposée. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie.

Les valeurs propres sont exactement les racines du polynôme caractéristique.

Conséquences: en dimension n, il y a au plus n valeurs propres ; un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, ou d'un $\mathbb{R}$-espace de dimension impaire, a au moins une valeur propre.

Multiplicité d'une valeur propre. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit. Inégalité $1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda$ pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Expression de la trace et du déterminant à l'aide des valeurs propres lorsque le polynôme caractéristique est scindé.

Correction des exos 10 et 12 de la feuille "réduction des endomorphismes".

Pour mercredi 12 novembre: exos 4, 6, 13 et 15 de la feuille "réduction des endomorphismes".

Mercredi 12 novembre 2025, de 8h à 10h

Notion de matrice ou d'endomorphisme diagonalisable, diagonalisation effective $A = PDP^{-1}$, interprétation de D et de P. Condition suffisante de diagonalisablité: si un endomorphisme d'un e.v. de dimension n admet n valeurs propres distinctes (ou si son polynôme caractéristique est scindé à racines simples), alors il est diagonalisable et les sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité: la somme (directe) des sous-espaces propres est E, ou bien la somme des dimensions des sous-espaces propres est $n = \dim(E)$.

TD groupe A (10h-11h30): exos 4, 13 et 15 de la feuille "réduction des endomorphismes".

TD groupe B (11h30-13h): idem.

Pour jeudi 13 novembre: exos 16, 19, 21a et 22 de la feuille "réduction des endomorphismes".

Jeudi 13 novembre 2025, de 10h à 12h

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement son polyôme caractéristique est scindé et, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre est égale à la multiplicité.

Théorème de Cayley-Hamilton (*admis*).

Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, ou bien si et seulement si le polynôme $P = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ est annulateur de u.

TD groupe A (13h-14h30): exos 19, 21a et 22 de la feuille "réduction des endomorphismes".

TD groupe B (14h30- 16h): exos 19 et 21a de la feuille "réduction des endomorphismes".

Pour lundi 17 novembre: exos 20, 25 et 27 de la feuille "réduction des endomorphismes".

Lundi 17 novembre 2025, de 10h à 13h

L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable est encore diagonalisable.

Endomorphismes et matrices trigonalisables. Interprétation en termes de sous-espaces stables. Un endomorphisme (ou une matrice) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Applications de la réduction: calculs de puissances de matrices, expression de suites vectorielles définies par une relation de récurrence linéaire d'ordre un.

Pour mercredi 19 novembre: exos 33, 34, 42 et 44 de la feuille “réduction des endomorphismes”.

Pour jeudi 27 novembre: DM 4

Mercredi 19 novembre 2025, de 8h à 10h

Applications de la réduction: expression de suites scalaires définies par une relation de récurrence linéaire d'ordre deux.

Séries entières: définition, exemples. Lemme d'Abel. Définition du rayon de convergence. Étude de la nature de la série entière pour $|z| \neq R$, convergence normale sur $\overline{D}(0, r)$ avec $r < R$.

TD groupe B (10h-11h30): exos 33, 42 et 44 de la feuille “réduction des endomorphismes”.

TD groupe A (11h30-13h): exos 33 et 44 de la feuille “réduction des endomorphismes”.

Pour jeudi 20 novembre: exos 22, 27 et 28 de la feuille “réduction des endomorphismes” + exo 4 de la feuille “séries entières”.

Jeudi 20 novembre 2025, de 10h à 12h

Détermination du rayon de convergence: comparaison des coefficients de deux séries entières, utilisations de la règle de d'Alembert.

Opérations sur les séries entières: somme, dérivation formelle (les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence).

TD groupe B (13h-14h30): exos 27, 28 et 34 de la feuille “réduction des endomorphismes”.

TD groupe A (14h30- 16h): idem.

Pour lundi 24 novembre: exos 1, 3 et 4 de la feuille “séries entières”.

Lundi 24 novembre 2025, de 10h à 13h

Produit de Cauchy de deux séries entières.

Régularité de la fonction somme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence $I =]-R, R[$:

- continuité car la série entière converge normalement **<u>sur tout segment</u>** inclus dans I ;

- obtention des primitives par primitivation terme à terme ;

- classe $\mathcal{C}^\infty$ et obtention des dérivées successives par dérivation terme à terme.

Conséquences: si $R > 0$, alors les coefficients sont $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ pour tout n. Classe $\mathcal{C}^\infty$ de certaines fonctions définies par un prolongement ou un raccordement.

Pour mercredi 26 novembre: exos 5, 6, 14 et 16 de la feuille “séries entières”.

Mercredi 26 novembre 2025, de 8h à 10h

Notion de fonction développable en série entière sur $]-r, r[$ avec $r > 0$, unicité du développement en série entière. Série de Taylor d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$. Rappel de la formule de Taylor avec reste intégral et de l'inégalité de Taylor-Lagrange. Développement en série entière usuels.

TD groupe A (10h-11h30): exos 5, 6 et 16 de la feuille “séries entières”.

TD groupe B (11h30-13h): exos 5, 6 et 14 de la feuille “séries entières”.

Pour jeudi 27 novembre: exos 9, 11 et 21 de la feuille “séries entières”.

Jeudi 27 novembre 2025, de 10h à 12h

Exercices sur les séries entières.

Notion de norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, exemples. Normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$.

TD groupe A (13h-14h30): exos 11 et 21 de la feuille “séries entières”.

TD groupe B (14h30- 16h): idem.

Pour lundi 1er décembre: exos 20, 26 et 31 de la feuille “séries entières”.

Lundi 1er décembre 2025, de 10h à 13h

Exemples de normes sur des espaces vectoriels de fonctions. Distance associée à une norme, boules, parties convexes. Toute boule est convexe. Parties bornées.

Norme associée à un produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité. Exemples.

Pour mercredi 3 décembre: exos 2, 3 et 5 de la feuille "espaces vectoriels normés".

Mercredi 3 décembre 2025, de 8h à 10h

Suites convergentes dans un espace vectoriel normé, dépendance par rapport à la norme. Unicité de la limite, opérations algébriques. Toute suite convergente est bornée. Suites extraites.

Normes équivalentes. Comparaison des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. On admet que, sur un espace vectoriel **de dimension finie**, toutes les normes sont équivalentes, ce qui autorise à parler de partie bornée ou de limite d'une suite sans préciser quelle est la norme choisie.

TD groupe B (10h-11h30): exos 2, 3 et 5 de la feuille "espaces vectoriels normés".

TD groupe A (11h30-13h): idem.

Pour jeudi 4 décembre: exos 4, 6 et 8 de la feuille "espaces vectoriels normés".

Jeudi 4 décembre 2025, de 10h à 12h

Dans un espace vectoriel de dimension finie, la convergence d'une suite peut s'étudier coordonnée par coordonnée dans une base.

Points intérieurs à une partie, intérieur de la partie, parties ouvertes dans un e.v.n. Points adhérents, adhérence, parties fermées. Parties denses.

TD groupe B (13h-14h30): exos 4, 6 et 8 de la feuille "espaces vectoriels normés".

TD groupe A (14h30- 16h): exos 4 et 8 de la feuille "espaces vectoriels normés".

Pour lundi 8 décembre: exos 17 et 18 de la feuille "espaces vectoriels normés".

Samedi 6 décembre 2025, de 8h à 12h

DS 4 (durée: 4 heures): séries entières (nombres de Bell) + réduction des endomorphismes (endomorphismes cycliques et matrices-compagnons).

Lundi 8 décembre 2025, de 10h à 13h

Caractérisation séquentielle des points adhérents, des parties fermées. Parties denses.

Les ouverts sont les complémentaires des fermés, et réciproquement. Intersections et réunions d'ouverts et de fermés.

Correction des exos 17 et 18 sur les EVN.

Pour mercredi 10 décembre: exos 9, 11a. et 12a. de la feuille "espaces vectoriels normés".

Pour jeudi 18 décembre: DM 5

Mercredi 10 décembre 2025, de 8h à 10h

Notion de limite d'une application d'une partie d'un e.v.n. vers un e.v.n. Unicité de la limite. Caractérisation séquentielle de la limite. Exemples.

Cas de la dimension finie: on étudie la limite des fonctions coordonnées relativement à une base. Limite d'une combinaison linéaire, d'une composée. Notion de continuité en un point.

TD groupe A (10h-11h30): exos 10, 11a et 12 de la feuille "espaces vectoriels normés".

TD groupe B (11h30-13h): exos 9, 10 et 11a de la feuille "espaces vectoriels normés".

Pour jeudi 11 décembre: exo 14 de la feuille "espaces vectoriels normés" + solutions développables en série entière de $x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$.

Jeudi 11 décembre 2025, de 10h à 12h

Continuité sur une partie. Opérations algébriques, composition. Cas des fonctions lipschitziennes. Images réciproques d'ouverts et de fermés.

Espaces vectoriels normés de dimension finie: Continuité des applications linéaires.

TD groupe A (13h-14h30): exo 14 de la feuille "espaces vectoriels normés" + recherche des solutions développables en série entière de $x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$.

TD groupe B (14h30- 16h): idem.

Pour lundi 15 décembre: exos 15 et 22 de la feuille "espaces vectoriels normés".

Lundi 15 décembre 2025, de 10h à 13h

Continuité des applications bilinéaires, multilinéaires et polynomiales en dimension finie. Applications: continuité du produit matriciel, continuité du déterminant, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Théorème des bornes atteintes.

Fonctions vectorielles: interprétation cinématique ou en termes de courbe paramétrée. Dérivation, linéarité de la dérivation. Dérivée de $L \circ f$, de $B(f, g)$, de $M(f_1, \cdots, f_p)$ avec L linéaire, B bilinéaire, M multilinéaire. Dérivation coordonnée par coordonnée dans une base. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Correction des exos 15 et 22 sur les EVN.

Pour mercredi 17 décembre: exos 21 et 24 de la feuille “espaces vectoriels normés” + exos 3 et 9 de la feuille “probabilités sur un univers fini” + exo 1 du poly “fonctions vectorielles”.

Mercredi 17 décembre 2025, de 8h à 10h

Équations différentielles linéaires scalaires d’ordre un: position du problème, intervention de la linéarité, expression intégrale des solutions, théorème de Cauchy linéaire.

Équations différentielles linéaires scalaires d’ordre deux: position du problème, intervention de la linéarité, théorème de Cauchy linéaire (*admis*), dimension de l’espace des solutions de l’équation homogène. Méthode de variation de la constante (ou méthode de Lagrange) lorsqu’on connaît une solution de (E_0) ne s’annulant pas sur I.

TD groupe B (10h-11h30): exo 24 de la feuille “espaces vectoriels normés” + exo 9 de la feuille “probabilités sur un univers fini” .

TD groupe A (11h30-13h): idem.

Pour jeudi 18 décembre: exos 1, 3, 9 et 13 de la feuille “équations différentielles”.

Jeudi 18 décembre 2025, de 10h à 12h

Équations différentielles linéaires scalaires d’ordre deux: cas des équations à coefficients constants.

Résolution d’un système différentiel linéaire homogène à coefficients constants lorsque la matrice est diagonalisable.

TD groupe B (13h-14h30): exos 1 et 13 de la feuille “équations différentielles”.

TD groupe A (14h30- 16h): idem.

Pour lundi 5 janvier 2026: exos 4, 6, 10, 14, 15, 17 et 20 de la feuille “équations différentielles” + exos 4, 5, 7, 8, 11 et 12 de la feuille “probabilités sur un univers fini”.

Pour jeudi 8 janvier 2026: DM 6

VACANCES de NOËL

Lundi 5 janvier 2026, de 10h à 13h

Théorème de convergence dominée, exemples.

Intégrales dépendant d'un paramètre: position du problème, vocabulaire, exemples.

Pour mercredi 7 janvier: exos 5 et 8 de la feuille "probabilités sur un univers fini" + exos 2 et 5 de la feuille "calcul intégral".

Mercredi 7 janvier 2026, de 8h à 10h

Théorème de convergence dominée à paramètre continu.

Théorème de continuité des intégrales à paramètre, adaptation au cas d'une domination sur tout segment.

TD groupe A (10h-11h30): exo 8 de la feuille "probabilités sur un univers fini" + exo 2 de la feuille "calcul intégral" + exo 20 de la feuille "équations différentielles".

TD groupe B (11h30-13h): exo 5 de la feuille "probabilités sur un univers fini" + exo 5 de la feuille "calcul intégral" + exo 20 de la feuille "équations différentielles".

Pour jeudi 8 janvier: exos 4, 13 et 22 de la feuille "calcul intégral".

Jeudi 8 janvier 2026, de 10h à 12h

Théorème de dérivation des intégrales à paramètre, adaptation au cas d'une domination sur tout segment. Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

TD groupe A (13h-14h30): exos 4, 13 et 21 de la feuille "calcul intégral".

TD groupe B (14h30- 16h): idem.

Pour lundi 12 janvier 2026: exos 14 et 23 de la feuille "calcul intégral".

Lundi 12 janvier 2026, de 10h à 13h

Théorème d'intégration terme à terme, exemples d'applications. Exemple où l'on applique le théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles, exemple où l'on majore à la main l'intégrale du reste.

Espaces préhilbertiens, rappel de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité, cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire, identité du parallélogramme, identité de polarisation. Vecteurs orthogonaux et "théorème de Pythagore".

Pour mercredi 14 janvier: exos 8, 9, 12 et 19 de la feuille "calcul intégral".

Mercredi 14 janvier 2026, de 8h à 10h

Familles orthogonales, relation de Pythagore. Toute famille orthogonale (finie) de vecteurs non nuls est libre. Familles orthonormales. Sous-espaces orthogonaux, notion de somme directe orthogonale de s.e.v. Notion d'orthogonal d'une partie de E préhilbertien, orthogonal d'un s.e.v., propriétes, exemples (notamment exemple où $F \oplus F^{\perp} \neq E$ et $(F^{\perp})^{\perp} \neq F$).

Espaces euclidiens: existence de bases orthonormales, supplémentaire orthogonal d'un s.e.v., théorème de la base orthonormée incomplète. Dans une BON, interprétation des coordonnées d'un vecteur, des coefficients de la matrice d'un endomorphisme.

TD groupe B (10h-11h30): exos 9, 12 et 19 de la feuille "calcul intégral".

TD groupe A (11h30-13h): idem.

Pour jeudi 15 janvier: exos 1, 3, 4 et 5 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

Jeudi 15 janvier 2026, de 10h à 12h

Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel V de dimension finie dans un espace préhilbertien E: on a $V \oplus V^{\perp} = E$ et $(V^{\perp})^{\perp} = V$. Expression du projeté orthogonal $p_V(x)$ dans une base orthonormale de V, inégalité de Bessel et cas d'égalité. Recherche des coordonnées de $p_V(x)$ dans une base quelconque de V par résolution d'un système linéaire. Distance d'un vecteur à un s.e.v. de dimension finie.

TD groupe B (13h-14h30): exos 3, 4 et 5 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

TD groupe A (14h30-16h): exos 1, 3 et 4 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

Pour lundi 19 janvier 2026: exos 8, 9 et 12 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

Samedi 17 janvier 2026, de 8h à 12h

DS 5 (durée: 4 heures): Deux sujets au choix

- DS 5a: un exo de proba + problème sur les distributions

- DS 5b: un exo de proba + un exo sur les équadiff + problème sur la formule des compléments (calcul intégral)

Lundi 19 janvier 2026, de 10h à 13h

Régression linéaire (droite des moindres carrés): interprétation en termes de projection orthogonale sur un plan.

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, définition de l'orthonormalisée d'une famille libre finie dans un espace préhilbertien. Cas d'une famille indexée par $\mathbb{N}$. Propriétés de la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{X}$, si $\mathcal{E}$ est l'orthonormalisée de $\mathcal{X}$.

Formes linéaires sur un espace euclidien ("théorème de représentation de Riesz"). Hyperplans: vecteur normal, équation cartésienne dans une BON, distance d'un vecteur à un hyperplan ou à une droite.

Pour mercredi 21 janvier: exos 7, 11, 16 et 17 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

Pour jeudi 29 janvier: DM 7

Mercredi 21 janvier 2026, de 8h à 10h

Isométries vectorielles (ou automorphismes orthogonaux) d'un espace euclidien: définition par conservation de la norme, caractérisations par conservation du produit scalaire, ou transformation des bases orthonormales, orthogonal d'un sous-espace stable, propriété $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$. Groupe orthogonal $\mathrm{O}(E)$. Exemple des symétries orthogonales.

Matrices orthogonales: définition par $A^\top A = I_n$, caractérisation par les vecteurs-colonnes ou les vecteurs-lignes. Groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{O}(n)$. Exemples. Utilisation des matrices orthogonales comme matrices de passage d'une base orthonormale à une base orthonormale.

TD groupe A (10h-11h30): exos 7, 11 et 16 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

TD groupe B (11h30-13h): exos 11, 16 et 17 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

Pour jeudi 22 janvier: exos 18, 19, 20 et 21 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

Jeudi 22 janvier 2026, de 10h à 12h

Matrices orthogonales directes et indirectes, groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{SO}(n)$. Utilisation des matrices orthogonales pour représenter une isométrie vectorielle d'un espace euclidien dans une base orthonormale. Retour sur le procédé de Gram-Schmidt (unicité de l'orthonormalisée). Expression de l'image d'un vecteur par une réflexion.

Endomorphismes autoadjoints (ou symétriques) d'un espace euclidien, propriétés élémentaires.

TD groupe A (13h-14h30): exos 18, 19 et 21 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

TD groupe B (14h30-16h): idem.

Pour lundi 26 janvier 2026: exos 20 et 22 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

Lundi 26 janvier 2026, de 10h à 13h

Représentation des endomorphismes autoadjoints par les matrices symétriques réelles en base orthonormale.

Théorème spectral: versions fonctionnelle et matricielle. Preuve du théorème spectral. Endomorphismes autoadjoints positifs et définis positifs et leur caractérisation spectrale. Matrices symétriques positives et définies positives et leur caractérisation spectrale. Cas des matrices carrées d'ordre deux.

Pour mercredi 28 janvier: exos 25, 27, 28 et 33 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

Mercredi 28 janvier 2026, de 8h à 10h

Rappels sur les ensembles dénombrables et au plus dénombrables.

Somme d'une famille au plus dénombrable de réels positifs dans $[0, +\infty]$, sommation par paquets, interversion de sommations, notion de famille sommable.

Tribu sur un ensemble, propriétes, espace probabilisable, événements, vocabulaires ensembliste et probabiliste. Notion de probabilité, σ-additivité, propriétés élémentaires, espace probabilisé.

TD groupe B (10h-11h30): exos 25, 28 et 33 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

TD groupe A (11h30-13h): exos 25 et 33 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

Pour jeudi 29 janvier: exos 29, 31, 36 et 39 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

Jeudi 29 janvier 2026, de 10h à 12h

Théorème de continuité croissante, théorème de continuité décroissante, propriété de sous-additivité, conséquences (une réunion au plus dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable). Probabilités conditionnelles, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes. Événements indépendants.

TD groupe B (13h-14h30): exos 29, 31 et 39 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

TD groupe A (14h30-16h): idem.

Pour lundi 2 février 2026: exos 4 et 5 de la feuille "probabilités".

Lundi 2 février 2026, de 10h à 13h

Distribution de probabilités sur un ensemble au plus dénombrable: si Ω est au plus dénombrable, une probabilité P sur $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)\big)$ est déterminée par les $P\big(\{\omega\}\big)$, avec $\omega \in \Omega$.

Notion de variable aléatoire discrète (v.a.d.) sur $(\Omega, \mathcal{A})$, fonction d'une variable aléatoire. Loi d'une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Exemple de la loi géométrique, interprétation comme temps d'attente d'un premier succès. Variables indépendantes (cas de deux uniquement).

Correction des exos 4 et 5 de la feuille "probabilités".

Pour mercredi 4 février: exos 6, 8 et 9 de la feuille "probabilités".

Mercredi 4 février 2026, de 8h à 10h

Familles finies de variables aléatoires indépendantes. Si $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes, alors $f_1(X_1), \cdots, f_n(X_n)$ sont indépendantes.

Loi de Poisson, interprétation comme "loi des événements rares".

Couples et n-uplets de variables aléatoires. Loi conditionnelle de X sachant un événement A.

TD groupe A (10h-11h30): exos 6, 8, 9 et 12a. de la feuille "probabilités".

TD groupe B (11h30-13h): exos 6, 9 et 12a. de la feuille "probabilités".

Pour jeudi 5 février: exos 11, 12 et 13 de la feuille "probabilités".

Jeudi 5 février 2026, de 10h à 12h

Théorème des coalitions. Suites de variables i.i.d.

Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $[0, +\infty]$, exemple de la loi de Poisson. Formule de calcul $\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$ lorsque $X(\Omega) \subset \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, cas de la loi géométrique.

Familles sommables de nombres réels ou complexes.

TD groupe A (13h-14h30): exos 11 et 12 de la feuille "probabilités".

TD groupe B (14h30-16h): idem.

Pour lundi 9 février 2026: exos 10 et 20 de la feuille "probabilités".

Samedi 7 février 2026, de 8h à 12h

DS 6 (durée: 4 heures): décomposition en valeurs singulières + probabilité d'un retour à l'origine (marche aléatoire unidimensionnelle non symétrique) + un exo sur la transformée de Laplace.

Lundi 9 février 2026, de 10h à 13h

Variables d'espérance finie à valeurs réelles ou complexes, définition de l'espérance.

Propriétés: formule de transfert, inégalité triangulaire, linéarité de l'espérance, espace vectoriel $L^1(\Omega)$, positivité et croissance pour les v.a. réelles, théorème de comparaison (si $|X| \leq Y$ et $Y \in L^1(\Omega)$, alors $X \in L^1(\Omega)$). Variables centrées. Si $X_1, \cdots, X_n$ sont d'espérance finie et indépendantes, alors $\mathrm{E}\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{E}(X_k)$. Inégalité de Markov.

Correction des exos 10 et 20 de la feuille "probabilités".

Pour mercredi 11 février: exos 7, 16 et 27 de la feuille "probabilités".

Pour jeudi 19 février: DM 8

Mercredi 11 février 2026, de 8h à 10h

Si X^2 est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie. Espace vectoriel $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ et forme bilinéaire symétrique positive $(X, Y) \mapsto \mathrm{E}(XY)$, inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité. Définition de la variance, formule de Koenig-Huygens, $V(aX + b)$. Écart-type. Variables centrées, réduites.

TD groupe B (10h-11h30): exos 7 et 27 de la feuille "probabilités" + simulation avec Python.

TD groupe A (11h30-13h): exos 7 et 16 de la feuille "probabilités" + simulation avec Python.

Pour jeudi 12 février: exos 16 (groupe B), 23 (a., b., c.) et 27 (groupe A) de la feuille "probabilités".