COLLES de MATHÉMATIQUES **PSI2 2025-2026**

Semaine 18 : du 16/02 au 20/02

Probabilités

Tout le programme précédent, plus:

Familles sommables (indexées par un ensemble I au plus dénombrable) de nombres réels ou complexes: on définit la sommabilité de $(x_i)_{i\in I}$ par $\sum_{i\in I} |x_i| < +\infty$. Définition de la somme $\sum_{i\in I} x_i$ en se ramenant à une somme de série absolument convergente, on admet alors la "convergence commutative".

Si la famille est sommable, alors on peut sommer par paquets, intervertir des sommations (théorème de Fubini), reconnaître des produits de deux sommes.

Comparaison: si $|x_i| \leq y_i$ pour tout $i \in I$ et (y_i) sommable, alors (x_i) est sommable. Linéarité, croissance.

Aucune démonstration, aucun exercice spécifiquement sur les familles sommables ne doit être proposé, il ne s'agit que d'un outil à utiliser dans le contexte des démonstrations de cours et des résolutions d'exercices de probabilités.

Variables aléatoires discrètes réelles ou complexes d'espérance finie, définition de l'espérance. Formule de transfert. Linéarité, positivité, croissance de l'espérance. Espace vectoriel $L^1(\Omega)$ des v.a. discrètes d'espérance finie. Inégalité triangulaire $\big|\mathrm{E}(X)\big| \leq \mathrm{E}\big(|X|\big)$.

Comparaison: si $|X| \leq Y$ et $Y \in L^1(\Omega)$, alors $X \in L^1(\Omega)$.

Si $X, Y \in L^1(\Omega)$ sont indépendantes, alors $XY \in L^1(\Omega)$ et $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$.

Espace vectoriel $L^2(\Omega)$ des v.a. **réelles** discrètes X "admettant un moment d'ordre deux" ou encore "de variance finie", i.e. telles que X^2 est d'espérance finie, inclusion $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$.

Variance de X pour $X \in L^2(\Omega)$. Formule de Koenig-Huygens. Relation $\mathrm{V}(aX + b) = a^2\mathrm{V}(X)$. Définition de l'écart-type. Cas où $\mathrm{V}(X) = 0$.

Covariance de X et Y si X et Y sont dans $L^2(\Omega)$, formule de Koenig-Huygens généralisée. L'application $(X, Y) \mapsto \mathrm{E}(XY)$ et la covariance sont des formes bilinéaires symétriques positives sur $L^2(\Omega)$, inégalités de Cauchy-Schwarz associées. Deux variables indépendantes sont décorrélées (réciproque fausse). Variance d'une somme.

Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev. Loi faible des grands nombres.

Démonstrations de cours ou proches du cours

- Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Interprétation comme loi des événements rares: "loi-limite" de $\mathcal{B}\Big(n, \dfrac{\lambda}{n}\Big)$.
- Somme de n variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson.
- Formule $\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$ pour X à valeurs dans $\mathbb{N}$.
- Si X^2 est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie. L'ensemble $L^2(\Omega)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- Calcul de la variance pour une loi de Poisson, pour une loi géométrique.
- Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.